Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 3 **T** Lösen Sie die DGL mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes!

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$$

Ansatz: $$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$\Longrightarrow$ $$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

und $$y'; = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

in DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - 4x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 4k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} 4 a_{k-2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2 a_k x^k \\
&= [2a_2 - 2a_0]x^0 + [6a_3 - 4a_1 - 2a_1]x^1 + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + (4k+2) a_k + 4a_{k-2}] x^k
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$a_2 = a_0 \qquad a_3 = a_1$$

$$a_{k+2} = \frac{(4k+2)a_k - 4a_{k-2}}{(k+2)(k+1)} \quad \text{für } k \geq 0$$

Damit erhalten wir für $a_0 = 0$ bzw. $a_1 = 0$ zwei linear unabh. Lösungen:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && a_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad a_1 = 0 \\
&\Longrightarrow && a_{2m+1} = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
&\text{und} && a_{2m} = \frac{a_0}{m!} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
&\text{denn} && a_{2(m+1)} = a_{2m+2} = \frac{(4 \cdot 2m + 2)a_{2m} - 4a_{2m-2}}{(2m+2)(2m+1)} \\
& && = \frac{(4 \cdot 2m + 2)\frac{a_0}{m!} - 4\frac{a_0}{(m-1)!}}{(2m+2)(2m+1)} = \cdots = \frac{a_0}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

Als erste Lösung ergibt sich

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_0}{m!} x^{2m} = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} = a_0 e^{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{ii)} && a_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad a_0 = 0 \\
&\Longrightarrow && a_{2m} = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
&\text{und} && a_{2m+1} = \frac{a_1}{m!} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
&\text{denn} && a_{2(m+1)+1} = a_{2m+3} = \frac{(4(2m+1)+2)a_{2m+1} - 4a_{2m-1}}{(2m+3)(2m+2)} = \cdots = \frac{a_1}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

Als zweite Lösung ergibt sich

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_0}{m!} x^{2m+1} = xe^{x^2}$$

Aufgabe 4 H Man bestimme die Reihenentwicklungen von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ aus der DGL $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ mittels Potenzreihenansatz!

Ansatz: $$x(t) = \sum_{k-0}^{\infty} a_k t^k$$

in DGL einsetzen:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}t^k + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + \omega^2 a_k] t^k$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2 a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Damit erhalten wir für $a_0 = 0$ bzw. $a_1 = 0$ zwei linear unabh. Lösungen:

$$\begin{array}{rrl}
\text{i)} & a_0 = 0 & \text{und} \quad a_1 \neq 0 \\
\Longrightarrow & a_{2m} = 0 & \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
\text{und} & a_{2m+1} = & (-1)^m \omega^{2m} \dfrac{a_1}{(2m+1)!} \\
\text{denn} & a_{2(m+1)+1} = & -\dfrac{\omega^2 a_{2m+1}}{(2m+1+2)(2m+1+1)} = \\
& & -\omega^2 \dfrac{(-1)^m \omega^{2m} a_1}{(2m+1)!(2m+2)(2m+3)} = (-1)^{m+1} \dfrac{\omega^{2(m+1)} a_1}{(2m+3)!}
\end{array}$$

als erste Lösung ergibt sich

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \omega^{2m} \frac{a_1}{(2m+1)!} t^{2m+1}$$

$$\begin{array}{rrl}
\text{ii)} & a_0 \neq 0 & \text{und} \quad a_1 = 0 \\
\Longrightarrow & a_{2m+1} = 0 & \text{für alle } m \in \mathbb{N} \\
\text{und} & a_{2m} = & (-1)^m \omega^{2m} \dfrac{a_0}{(2m)!} \\
\text{denn} & a_{2(m+1)} = & -\dfrac{\omega^2 a_{2m}}{(2m+2)(2m+1)} = \\
& & -\omega^2 \dfrac{(-1)^m \omega^{2m} a_0}{(2m)!(2m+1)(2m+2)} = (-1)^{m+1} \dfrac{\omega^{2(m+1)} a_0}{(2m+2)!}
\end{array}$$

als zweite Lösung ergibt sich

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \omega^{2m} \frac{a_0}{(2m)!} t^{2m}$$

Nun sind $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ bekanntlich Lösungen der DGL. Wir betrachten zunächst $\sin \omega t$. Also sind sie Linearkombinationen von y_1 und y_2. Für $\sin \omega t$ ergibt sich

$$\sin \omega t = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{(2m+1)!} t^{2m+1} + a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{(2m)!} t^{2m}$$

Nun müssen wir a_0 und a_1 bestimmen. Nun gilt

$$a_0 = \sin(\omega \cdot 0) = 0 \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin \omega t|_{t=0} = \omega \cos \omega \cdot 0 = \omega.$$

Damit ergibt sich die Potenzreihendarstellung

$$\sin \omega t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \omega^{2m+1}}{(2m+1)!} t^{2m+1}$$

Ganz analog erhält man für den Cosinus wegen

$$\cos\omega\cdot 0 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t|_{t=0} = -\omega\sin\omega\cdot 0 = 0$$

$$\cos\omega t = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\omega^{2m}}{(2m)!}t^{2m}$$

Aufgabe 5 T /H Die schwingende Kreismembran (z.B. eine Trommel) mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 erfüllt folgendes Randwertproblem für die zweidimensionale Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}) = c^2\Delta u &\quad \text{für } x^2+y^2 \le 1 \\ u(x,y,t) = 0 &\quad \text{für } x^2+y^2 = 1 \end{aligned}$$

i) Transformieren Sie die DGL auf Polarkoordinaten!

ii) Lösen Sie die transformierte DGL mit einem Separationsansatz! Für welche Werte der verschiedenen auftretenden Separationskonstanten ergibt sich eine (sinnvolle) Lösung der DGL?

iii) Für den Radius $R(r)$ erhält man als Lösungen $R_n(r) = J_n(\omega r)$ (Besselfunktionen). Für welche Werte von ω erhält man eine Lösung, die die Randwerte erfüllt?

Diese Aufgabe wird ausführlich in Mayberg/Vachenauer “Höhere Mathematik 2”, Kapitel 12, Paragraph 4.7 (S. 392). besprochen.