Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 4 **T** Man leite eine Identität für die Besselfunktionen her, indem man die Gleichung

$$e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(\rho)x^k$$

zweimal nach ρ differenziert!

$$\begin{aligned}
& & e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\rho)x^k \\
&\Longrightarrow & \frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k'(\rho)x^k \\
&\Longrightarrow & \frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})^2 e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k''(\rho)x^k \\
&\Longrightarrow & \frac{1}{4}(x^2-2+\frac{1}{x^2})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\rho)x^k &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k''(\rho)x^k \\
&\Longrightarrow & \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}[J_{k-2}(\rho)-2J_k(\rho)+J_{k+2}(\rho)]x^k &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k''(\rho)x^k \\
&\Longrightarrow & \frac{1}{4}[J_{k-2}(\rho)-2J_k(\rho)+J_{k+2}(\rho)] &= J_k''(\rho)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **T** Entwickeln sie $f(x) = x$ nach einer geeigneten Besselfunktion J_k.

Wenn wir $f(x) = x$ nach J_1 entwickeln, können wir die auftretenden Integrale ausrechnen.

$$\begin{aligned}
& & x &\approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_1(j_{1,n}x) \\
&\text{mit} & c_n &= \frac{2}{[J_2(j_{1,n})]^2} \int_0^1 x J_1(j_{1,n}x) x \,\mathrm{d}x \\
& & &= \frac{2}{[J_2(j_{1,n})]^2} \int_0^1 x^2 J_1(j_{1,n}x) \,\mathrm{d}x \\
&(t = j_{1,n}x) & &= \frac{2}{[J_2(j_{1,n})]^2} \int_0^{j_{1,n}} \frac{t^2}{j_{1,n}^2} J_2(t) \frac{\mathrm{d}t}{j_{1,n}} \\
& & &= \frac{2}{[J_2(j_{1,n})]^2} [\frac{t^2}{j_{1,n}^3} J_2(t)]_0^{j_{1,n}} \\
& & &= \frac{2}{[J_2(j_{1,n})]^2} \frac{J_2(j_{1,n})}{j_{1,n}} = \frac{2}{j_{1,n} J_2(j_{1,n})} \\
&\Longrightarrow & x &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{j_{1,n} J_2(j_{1,n})} J_1(j_{1,n}x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 T /H Berechnen Sie $J_k(3)$ für $-5 \leq k \leq 5$ mit Hilfe der Identitäten (70) und (82) im Skript aus

$$J_0(3) = -0.2600529549... \quad \text{und} \quad J_1(3) = 0.3390589585... .$$

$$\begin{aligned}
&\text{Es gilt } \frac{2k}{x} J_k(x) = J_{k+1} + J_{k-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad J_{k+1} = \frac{2k}{x} J_k(x) - J_{k-1} \\
&\Longrightarrow \quad J_2(3) = \frac{2}{3} J_1(3) - J_0(3) \approx 0.4860922605 \quad \text{und} \quad J_{-2}(3) = 0.4860922605 \\
&\Longrightarrow \quad J_3(3) = \frac{4}{3} J_2(3) - J_1(3) \approx 0.3090640555 \quad \text{und} \quad J_{-3}(3) \approx -0.3090640555 \\
&\Longrightarrow \quad J_4(3) = \frac{6}{3} J_3(3) - J_2(3) \approx 0.1320358506 \quad \text{und} \quad J_{-4}(3) \approx 0.1320358506 \\
&\Longrightarrow \quad J_5(3) = \frac{4}{3} J_4(3) - J_3(3) \approx 0.0430315460 \quad \text{und} \quad J_{-5}(3) \approx -0.0430315460
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 H Bestimmen Sie das Legendre-Polynom P_5 !
Man kann z. B. die Rekusionsformel

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$$

benutzen. Im Skript sind schon ausgerechnet

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad \text{und} \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \ .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
P_5 &= \frac{1}{5}[(9x)\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) - 4\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)] \\
&= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 **H** Probieren Sie ein wenig und finden Sie mindestens eine weitere Identität für die Besselfunktionen aus den schon Bekannten, z.B. durch Ableiten und/oder Kombination!

Für diese Aufgabe gibt es keine eindeutige Lösung.