TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

HÖHERE MATHEMATIK III für E-TECHNIKER

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 4 Gegeben ist die DGL

T $y'' - 2y' + y = e^{2x}, \qquad a = 0,\ b = 1$

H $y'' + 4y = 3\sin x, \qquad a = 0,\ b = \pi$

Lösen Sie, falls möglich, die Randwertprobleme R_1, R_2, R_3 (vgl. Aufgabe 1)!

T $y'' - 2y' + y = e^{2x}, \qquad a = 0,\ b = 1$

Lösung der DGL ist

$$y = e^{2x} + e^x(c_1 + c_2 x) \quad y' = 2e^{2x} + c_1 e^x + c_2(x+1)e^x$$

R1 $\quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= 1 + c_1 && \Longrightarrow \boxed{c_1 = -1} \\ 0 = y(1) &= e^2 + e(c_1 + c_2) && \Longrightarrow \boxed{c_2 = 1 - e} \end{aligned}$$

Lösung des Randwertproblems R1 ist

$$y = e^{2x} - e^x + (1 - e)xe^x$$

R2 $\quad y(0) = 0 \quad y'(1) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= 1 + c_1 && \Longrightarrow \boxed{c_1 = -1} \\ 0 = y'(1) &= 2e^2 + e^x(-1 + 2c_2) && \Longrightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2} - e} \end{aligned}$$

Lösung des Randwertproblems R2 ist

$$y = e^{2x} - e^x + (\frac{1}{2} - e)xe^x$$

R3 $\quad y'(0) = 0 \quad y'(1) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = y'(0) &= 2 + c_1 + c_2 \\ 0 = y'(1) &= 2e^2 + e^x(-1 + 2c_2) \\ \Longrightarrow \quad & \boxed{c_1 = 2e - 4} \quad \boxed{c_2 = 2 - 2e} \end{aligned}$$

Lösung des Randwertproblems R3 ist

$$y = e^{2x} + (2e-4)e^x + (2-2e)xe^x$$

H $\quad y''+4y = 3\sin x, \qquad a = 0,\ b = \pi$

Lösung der DGL ist

$$y = \sin x + c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \qquad y' = \cos x + 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

R1 $\quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$

$$0 = y(0) = c_2 \implies \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = y(\pi) = \sin\pi + c_1 \sin 2\pi + c_2 \cos 2\pi \implies c_2 = 0$$

Lösung des Randwertproblems R1 ist

$$y = \sin x + c_1 \sin 2x \quad \text{mit beliebigem } c_1 \in \mathbb{R}$$

R2 $\quad y(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

$$0 = y(0) = c_2 \implies \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = y'(\pi) = \cos\pi + 2c_1 \cos 2\pi - 2c_2 \sin 2\pi \implies \boxed{c_1 = \frac{1}{2}}$$

Lösung des Randwertproblems R2 ist

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

R3 $\quad y'(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

$$0 = y'(0) = 1 + 2c_1 \implies \boxed{c_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$0 = y'(\pi) = \cos\pi + 2c_1 \cos 2\pi - 2c_2 \sin 2\pi \implies \boxed{c_1 = \frac{1}{2}}$$

Das ist ein Widerspruch, das Problem R3 ist nicht lösbar!

Aufgabe 5 Bringen Sie die DGLen in selbstadjungierte Form!

T $\quad xy'' + x^2y' + y = 0 \mid \cdot e^{s(x)}$ mit

$$s(x) = \int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \ln x$$

$$\implies e^{s(x)} = e^{\frac{x^2}{2} - \ln x} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x}$$

das führt auf die DGL

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{x^2}{2}} y'' + x e^{\frac{x^2}{2}} y' + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x} y = 0 \\
\iff \quad & \left(e^{\frac{x^2}{2}} y'\right)' + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x} y = 0
\end{aligned}
$$

H $\quad (x-1)y'' + (x^2-x+1)y' + e^{-x^2} y = 0 \mid \cdot e^{s(x)}$ mit

$$
s(x) = \int \frac{x^2-x+1-1}{x-1} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}
$$

$$
\implies e^{s(x)} = e^{\frac{x^2}{2}}
$$

das führt auf die DGL

$$
\begin{aligned}
& (x-1) e^{\frac{x^2}{2}} y'' + (x^2-x+1) e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0 \\
\iff \quad & \left((x-1) e^{\frac{x^2}{2}} y'\right)' + e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0
\end{aligned}
$$