Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

8. Übungsblatt

Aufgabe 4 Man löse das Rand-Eigenwert-Problem!

T $$y'' - 4y' + y + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$$

allg. Lösung der DGL ist

$$y = c_1 e^{(2+\sqrt{3-\lambda})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3-\lambda})x}$$

für $\lambda \leq 3$ erhält man

$$y' = (2+\sqrt{3-\lambda})c_1 e^{(2+\sqrt{3-\lambda})x} + (2-\sqrt{3-\lambda})c_2 e^{(2-\sqrt{3-\lambda})x}$$

die RB liefern dann

$$\begin{aligned}
0 = y'(0) &= (2+\sqrt{3-\lambda})c_1 + (2-\sqrt{3-\lambda})c_2 \\
0 = y(\pi) &= c_1 e^{(2+\sqrt{3-\lambda})\pi} + c_2 e^{(2-\sqrt{3-\lambda})\pi} \\
\iff \qquad 0 &= c_1 e^{(2\cdot\sqrt{3-\lambda})\pi} + c_2 \\
\iff \qquad c_2 &= -c_1 e^{(2\cdot\sqrt{3-\lambda})\pi}
\end{aligned}$$

eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich

$$0 = (2+\sqrt{3-\lambda})c_1 - (2-\sqrt{3-\lambda})c_1 e^{(2\cdot\sqrt{3-\lambda})\pi}$$

also entweder $c_1 = 0$ (und damit $c_2 = 0$) oder

$$0 = (2+\sqrt{3-\lambda}) - (2-\sqrt{3-\lambda})e^{(2\cdot\sqrt{3-\lambda})\pi}$$

diese Gleichung hat genau eine Lösung λ

für $\lambda > 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
y &= e^{2x}[c_1 \sin\sqrt{\lambda-3}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda-3}x] \\
\Longrightarrow \qquad y' &= e^{2x}[c_1(\sqrt{\lambda-3}\cos\sqrt{\lambda-3}x + 2\sin\sqrt{\lambda-3}x) + \\
&\quad + c_2(-\sqrt{\lambda-3}\sin\sqrt{\lambda-3}x + 2\cos\sqrt{\lambda-3}x)]
\end{aligned}$$

die RB führen auf

$$\begin{aligned}
& 0 = y'(0) = c_1\sqrt{\lambda-3} + 2c_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & c_2 = -\frac{\sqrt{\lambda-3}}{2}c_1 \\
& 0 = y(\pi) = e^{2\pi}[c_1 \sin\sqrt{\lambda-3}\pi + c_2\cos\sqrt{\lambda-3}\pi] \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 = c_1 \sin\sqrt{\lambda-3}\pi + c_2\cos\sqrt{\lambda-3}\pi \\
\Longrightarrow \quad & 0 = c_1 \sin\sqrt{\lambda-3}\pi - (\frac{\sqrt{\lambda-3}}{2}c_1)\cos\sqrt{\lambda-3}\pi
\end{aligned}$$

also entweder $c_1 = c_2 = 0$ oder

$$\tan\sqrt{\lambda-3}\pi = \frac{\sqrt{\lambda-3}}{2}$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen λ_n, die sich aber nicht mehr elementar darstellen lassen.

H $$y'' + 2y' + \lambda y = 0 \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

allg. Lösung der DGL ist

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

für $\lambda \leq 1$ erhält man aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
& 0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_1 e^{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-\lambda}\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{1-\lambda}\frac{\pi}{2}} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 = c_1 e^{\pi\sqrt{1-\lambda}} + c_2 \\
\text{und} \quad & 0 = y(\pi) = c_1 e^{-\pi+\sqrt{1-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\pi-\sqrt{1-\lambda}\pi} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 = c_1 e^{2\pi\sqrt{1-\lambda}} + c_2 \\
\Longrightarrow \quad & c_1 e^{\pi\sqrt{1-\lambda}} = c_1 e^{2\pi\sqrt{1-\lambda}} \\
\Longleftrightarrow \quad & c_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 1
\end{aligned}$$

wobei sich für $c_1 = 0$ in derselben Weise auch $\lambda = 1$ ergibt

für $\lambda > 1$ erhalten wir

$$y = Ae^{-x}\sin(\sqrt{\lambda-1}x + \alpha)$$

aus den RB ergibt sich dann

$$
\begin{array}{ll}
 & 0 = y(\frac{\pi}{2}) = Ae^{-\frac{\pi}{2}} \sin(\sqrt{\lambda - 1}\frac{\pi}{2} + \alpha) \\
\iff & 0 = \sin(\sqrt{\lambda - 1}\frac{\pi}{2} + \alpha) \\
\iff & \sqrt{\lambda - 1}\frac{\pi}{2} + \alpha = k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\text{und} & 0 = y(\pi) = Ae^{-\pi} \sin(\sqrt{\lambda - 1}\pi + \alpha) \\
\iff & 0 = \sin(\sqrt{\lambda - 1}\pi + \alpha) \\
\iff & \sqrt{\lambda - 1}\pi + \alpha = k'\pi \quad \text{für ein } k' \in \mathbb{Z} \\
\implies & \sqrt{\lambda - 1}\pi + \alpha - [\sqrt{\lambda - 1}\frac{\pi}{2} + \alpha = (k' - k) \\
\iff & \frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2} \in \mathbb{Z} \quad \iff \quad \lambda_n = 4n^2 + 1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \\
\text{und} & \alpha = \pi
\end{array}
$$

insgesamt haben wir damit

$$y_n = Ae^{-x} \sin(2nx + \pi)$$

Aufgabe 5 Schreiben Sie die DGL in ein DGL-System erster Ordnung um!

T $x^4 y^{(4)} + x^3 y''' + x^2 y'' + xy' + y = \sin \omega x$

mit $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y''$ und $y_4 = y'''$

ergibt sich nach Division durch x^4

$$
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x^{-4} & -x^{-3} & -x^{-2} & -x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{x^4} \sin \omega x \end{pmatrix}
$$

H $y''' - \frac{1}{x^2} y'' + \frac{1}{x} y = e^{x^2}$

mit $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y''$

ergibt sich

$$
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{x^2} \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 6 Finden Sie eine partikuläre Lösung für das DGL-System!

T

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 4y_1 + 5y_2 + 4e^t \cos t \\
\dot{y}_2 &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

allgemeine Lösung des homognen Systems ist

$$\vec{y}_H = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3+i}{5} \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3-i}{5} \end{pmatrix}$$

oder reell:

$$\vec{y}_H = c_1 [e^t \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix} + e^t \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}] + c_2 [\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}]$$

Berechnung einer partikulären Lösung mittels Variation der Konstanten.
Wir rechnen komplex und nehmen anschließend den Realteil,
da $e^t \cos t = \mathrm{Re}\, e^{(1+i)t}$ ist.
Es ergibt sich das GLS

$$\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & e^{(1-i)t} \\ \frac{-3-i}{5} e^{(1+i)t} & \frac{-3+i}{5} e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(1+i)t}$$

Die Lösung dieses GLS ist

$$\begin{aligned} & c_1' = 2+6i, \qquad c_2' = (2-6i)e^{2it} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = (2+6i)t, \quad c_2 = (-3-i)e^{2it} \end{aligned}$$

Als komplexe partikuläre Lösung erhalten wir also

$$\begin{aligned} \vec{y}_P &= (2+6i)te^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3+i}{5} \end{pmatrix} + (-3-i)e^{2it} e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3-i}{5} \end{pmatrix} = \\ &= te^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2+6i \\ \frac{-12-16i}{5} \end{pmatrix} + e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -3-i \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und der Realteil davon ist

$$\mathrm{Re}\, y_P = te^t \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-12}{5} \end{pmatrix} + te^t \sin t \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix} + e^t \cos t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + e^t \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 3y_1 - 4y_2 + e^t \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 + e^t \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$y_H = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}]$$

Wir machen den Ansatz für Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2e^t & 4te^t \\ e^t & 2te^t - e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad & c_1' = t + \frac{1}{2} \quad c_2' = -\frac{1}{2} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = \frac{1}{2}(t^2 + t), \quad c_2 = -\frac{t}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(t^2+t)e^t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{t}{2}e^t[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}] = \\ &= e^t[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}] \end{aligned}$$