TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

HÖHERE MATHEMATIK III für E-TECHNIKER

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 4 Man berechne die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der unten stehenden Matrizen und finde eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren.

T i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

char. Polynom: $t^2 - 4t + 4$

Eigenwert: $\lambda = 2, \quad$ mit alg. Vielfachheit 2

Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ geom. Vielfachheit des EW $\lambda = 2$ ist 1

finde Hauptvektor 2. Stufe als Lösung des GLS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis aus Eigen und Hauptvektoren:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

char. Polynom: $t^2 + 1$

Eigenwerte: $\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = i$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$

Die beiden Eigenvektoren bilden eine Basis.

H iii) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 18 \\ -9 & -10 & -17 \end{pmatrix}$

char. Polynom: $-t^3 + 3t - 2$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, alg. Vielf.: 2,

$\lambda_2 = -2$ alg. Vielf.: 1

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor 2. Stufe zu $\lambda_1 = 1$ erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 9 & 9 & 18 \\ -9 & -10 & -18 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis aus Eigen- und Hauptvektoren:

$$\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

char. Polynom $t^2 - 4t + 7$

Eigenwert $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{3}$ mit Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenwert $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{3}$ mit Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die beiden Eigenvektoren bilden eine Basis

Aufgabe 5 **T** b) Die 3×3-Matrix B sei die darstellende Matrix der Drehung um die Achse $\{t(0,0,1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit Winkel $\alpha = \pi/2$. Man gebe ohne Rechnung die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren an!

Ohne Rechnung kann man nur die reellen Eigenwerte sehen: Bei einer Drehung um den Winkel $\pi/2 = 45°$ bleibt nur die Drehachse fest. Also gibt es einen reellen Eigenwert $lambda = 1$ mit Eigenvektor $\vec{v} = (0, 0, 1)^T$.

H Man berechne eine Basis aus Haupt- und Eigenvektoren der obigen Matrix B.

Die Marix B hat die Gestalt

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $-t^3 + t^2 - t + 1$. Ausser dem o.g. reellen Eigenwert gibt es noch die komplexen EW i und $-i$ mit den Eigenvektoren $(i, 1, 0)^T$ bzw. $(-i, 1, 0)^T$. Die drei Eigenvektoren bilden eine Basis.