Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 Finden Sie eine analytische Funktion $f(x+iy)$ für die gilt $\mathrm{Im} f = e^x(x\cos y - y\sin y)$!

Aufgabe 2 Worauf wird der Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ durch die Möbiustransformation $\phi(z) = \dfrac{z+i}{iz+1}$ abgebildet? Was sind die Bilder der reellen und der imaginären Achse?

Aufgabe 3 Finden Sie eine konforme Abbildung, die den Viertelkreis $\{z \in \mathbb{D} : \mathrm{Re} z > 0, \mathrm{Im} z > 0\}$ auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ abbildet!
Ist die Abbildung auch auf dem Rand winkeltreu?

Aufgabe 4 Finden Sie eine analytische Funktion $f(x+iy)$ für die gilt

T $\mathrm{Re} f = x^3 - 3xy^2$ **H** $\mathrm{Im} f = 2xy + x + y$

Aufgabe 5 Worauf wird der Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ durch die Möbiustransformation $\phi(z)$ abgebildet?

T $\phi(z) = \dfrac{1+iz}{z}$ **H** $\phi(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

Aufgabe 6 Finden Sie eine konforme Abbildung, die das Gebiet G auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ abbildet!

T $G = \{z : 0 < \mathrm{Im} z < \frac{\pi}{3}\}$ **H** $G = \{z \in \mathbb{D} : \mathrm{Re} z > 0\}$

(*) **Aufgabe 7** i) Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation $\phi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ genau eine Darstellung $\phi(z) = \dfrac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ mit $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1$ hat!

ii) Folgern Sie aus i), dass die Abbildung L mit $\dfrac{az+b}{cz+d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Menge aller Möbiustransformationen bijektiv auf die Menge aller komplexen 2×2-Matizen mit Determinante 1 abbildet.

iii) Berechnen Sie die Inverse der Möbiustransformation $\phi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$ und vergleichen Sie diese mit der inversen Matrix von $\mathrm{L}(\phi)$.

iv) Seien $\phi(w) = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ und $\psi(z) = \dfrac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ zwei Möbiustransformationen. Berechnen Sie $\phi \circ \psi(z) = \phi(\psi(z))$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Produkt der Matrizen $\mathrm{L}(\phi) \cdot \mathrm{L}(\psi)$!