TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01
Institut für Mathematik Stand: 14. Februar 2002
Ferus / Peters

Lösungen zur Klausur vom 13.2.2002
Analysis I

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 0, \qquad \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = 0.$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann folgt aus $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.\end{aligned}$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

$$z_1 = \frac{5}{3+4i} = \frac{5(3-4i)}{9+16} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i,$$
$$z_2 = \left(\cos(\tfrac{\pi}{8}) + i\sin(\tfrac{\pi}{8})\right)^{16} = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^{16} = e^{2\pi i} = 1.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Da nach Polynomen mit reellen Koeffizienten gesucht ist, sind mit i und $i+1$ auch $-i$ und $-i+1$ Nullstellen. Ein Polynom 5. Grades hat höchstens 5 verschiedene Nullstellen. Also haben die gesuchten Polynome genau die Nullstellen 0, i, $i+1$, $-i$ und $-i+1$. Da die 5. Ableitung konstant $5!$ sein soll, ist der Koeffizient vor x^5 gleich 1. Also gibt es genau ein Polynom mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften, und zwar

$$p(x) = x(x-i)(x+i)(x-i-1)(x+i-1).$$

4. Aufgabe
(10 Punkte)

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

Da $\lim_{x\to 0}(x\cos x-\sin x)=0$ und $\lim_{x\to 0}x\sin x=0$ ist und $(x\sin x)'=\sin x+x\cos x\neq 0$ für alle $x\neq 0$ nahe 0. Außerdem ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}\right)=0.$$

(Dabei wurde $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ verwendet.) Insgesammt folgt damit aus der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)=0.$$

5. Aufgabe
(10 Punkte)

Mit dem angegebenen Definitionsbereich waere f keine Funktion. Es wurden die folgenden beiden „Lösungen“ als richtig anerkannt:

1. Da exp eine stetige Funktion und $\lim\limits_{x\searrow 0}x\ln x=0$ ist, gilt

   $$\lim_{x\searrow 0}x^x=\lim_{x\searrow 0}e^{x\ln x}=e^0=1.$$

   Weiterhin folgt mit der Regel von de l'Hospital

   $$\lim_{x\nearrow 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\nearrow 0}(1+\tan^2 x)=1$$

   Also ist f (in $x=0$) für $a=1$ stetig.

2. Die Funktion ist z.B. bei $-\frac{\pi}{2}$ für kein $a\in\mathbb{R}$ stetig (fortsetzbar).

6. Aufgabe
(10 Punkte)

Die Reihe ist eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius

$$R=\frac{1}{\limsup\sqrt[k]{\sqrt{k}}}=\frac{1}{(\lim\sqrt[k]{k})^{\frac{1}{2}}}=1.$$

Also konvergiert sie für $x\in\,]2,4[$ und sie divergiert für $x\in\mathbb{R}\setminus[2,4]$.
Für $x=2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Da $(\frac{1}{\sqrt{k}})$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz Kriterium.
Für $x = 4$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Letztere Reihe ist die harmonische. Daher divergiert die Potenzreihe für $x = 4$.
Die Reihe konvergiert also für alle $x \in [2,4[$ und sie divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \backslash [2,4[$.

7. Aufgabe (10 Punkte)

f ist 2–mal differnzierbar mit den Ableitungen

$$f'(x) = (-2x^2 + 5x)e^{-x},$$

$$f''(x) = (2x^2 - 9x + 5)e^{-x}.$$

$f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = \frac{5}{2}$. Da $f''(0) = 5 > 0$ und $f''(\frac{5}{2}) = -5e^{-\frac{5}{2}} < 0$ ist, ist $x = 0$ ein lokales Minimum und $x = \frac{5}{2}$ ein lokales Maximum. Da alle Punkte des Definitionsbereiches von f innere Punkte sind, sind dies die einzigen lokalen Extremwerte.
Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ und $f(0) = -e^{-0} = -1 < 0$. Daher ist $f(0) = -1$ globales Minimum von f und f besitzt kein globales Maximum.

8. Aufgabe (10 Punkte)

Mit partieller Integration $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx = \int x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = 6x + 1$, $dy = 6dx$:

$$\int g(x)dx = \int \sin(6x+1)dx = \int \sin y \frac{1}{6} dy = -\frac{1}{6}\cos(y) = -\frac{1}{6}\cos(6x+1).$$