TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik 15.4.2002
Prof. Dr. Ferus

Analysis I–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.
Die Klausur ist mit 32 Punkten bestanden.

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Folgern Sie mit vollständiger Induktion direkt aus den Anordnungsaxiomen, dass für alle a, $b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$0 \leq a^n < b^n.$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von

$$p(x) = (x^2 + 1)(x^3 + x^2 - 5x + 3).$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (bei d) und e) ist $a \in \mathbb{R}_{>0}$).

a) $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$, b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, c) $c_n = (1+i)^n$,

d) $d_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$, e) $e_n = n(\sqrt[n]{a} - 2)$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Eigenschaft $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass f konstant Null ist.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \frac{c_3}{x-a_3} = 0$$

für beliebige positive Zahlen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < a_3$ stets eine Lösung zwischen a_1 und a_2 und eine zwischen a_2 und a_3 hat.

7. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades, $T_3(x)$, von

$$f\colon\ ]0,\infty] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(x+1)$$

im Punkt $x_0 = 1$.

b) Beweisen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$ gilt

$$|T_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktionen.

a) $f(x) = xe^{x^2}$, b) $g(x) = x\sin(x-4)$.

Gesamtpunktzahl: 80

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$