TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01
Institut für Mathematik Stand: 16. April 2002
Ferus / Peters

Lösungen zur Klausur vom 15.4.2002
Analysis I

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $0 \leq a < b \iff 0 \leq a^n < b^n$.

Induktionsschritt: Aus $a^n < b^n$ und $0 < b$ folgt $a^n b < b^{n+1}$. Aus $0 \leq a^n$ und $a < b$ folgt $a^{n+1} \leq a^n b$. Zusammen folgt $a^{n+1} < b^{n+1}$. Weiterhin folgt aus $0 \leq a$ und $0 \leq a^n$ die zweite Behauptung $0 \leq a^{n+1}$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Das Polynom $x^2 + 1$ hat die Nullstellen $\pm i$. Das Polynom $x^3 + x^2 - 5x + 3$ hat die Nullstelle 1 (geraten), daher ist es durch $(x - 1)$ teilbar und man erhält $x^2 + 2x - 3$. Mit der p–q–Formel erhält man noch die Nullstelle -3.

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\lim a_n = \lim \frac{2n+1}{n} = 2 + \lim \frac{1}{n} = 2.$

b) $\lim b_n = \lim \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$

c) Diese Folge ist divergent, da $|1 + i| = \sqrt{2} > 1$.

d) $\lim d_n = \lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim n(e^{\frac{1}{n}\ln a} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln a}-1}{\frac{1}{x}}$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\ln a e^{\frac{1}{x}\ln a}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \ln a e^{\frac{1}{x}\ln a} = \ln a.$

e) Die Folge ist divergent (bestimmt gegen $-\infty$), da $\lim n = \infty$ und $\lim \sqrt[n]{a} - 2 = -1$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) Die Glieder der Reihe bilden keine Nullfolge, also ist die Reihe divergent.

b) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium (absolut):

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

c) Die Folge $(\frac{1}{\ln n})$ ist eine monoton fallende Nullfolge und damit konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

5. Aufgabe

(10 Punkte)

Angenommen es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$. Sei $p \in \mathbb{R}_{>0}$ die Periode von f, dann gilt für alle $n \in N$: $f(x+np) = f(x) \neq 0$. Da $a_n = (x+np)$ gegen ∞ konvergiert aber $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) \neq 0$ ist, ist dies ein Widerspruch zu der Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

6. Aufgabe

(10 Punkte)

Zwischen a_1 und a_2 ist $f(x) = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \frac{c_3}{x-a_3}$ eine stetige Funktion und es gilt $\lim_{x\nearrow a_1} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\searrow a_2} f(x) = -\infty$. Daher gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in]a_1, a_2[$ mit $f(x) = 0$. Dasselbe gilt für a_2 und a_3.

7. Aufgabe

(10 Punkte)

a) Die Ableitungen von f:

$$f(x) = \ln(x+1), \qquad f'(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$
$$f'''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{(x+1)^4},$$

Daraus folgt

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3.$$

b) Aus der Taylorschen Formel folgt, dass es für alle $x \in [0,2]$ ein ξ zwischen x und x_0 gibt, sodass

$$|T_3(x) - f(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4\right| = \left|\frac{1}{4(\xi+1)^4}(x-1)^4\right| \leq \frac{1}{4}$$

8. Aufgabe

(10 Punkte)

a) Mit Substitution

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

b) Mit partieller Integration

$$\int x\sin(x-4)dx = -x\cos(x-4) + \int \cos(x-4)dx = -x\cos(x-4) + \sin(x-4).$$