TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Stand: 22. Januar 2002
Ferus
Peters

Lösungsskizzen zur Probeklausur
Analysis I

---

1. Aufgabe

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133$.

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 12^2 \\ &= (11^{n+1} + 12^{2n-1}) \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot (12^2 - 11) \\ &= (11^{n+1} + 12^{2n-1}) \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 133. \end{aligned}$$

Also ist $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar, wenn $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar ist.

2. Aufgabe

Definiere 3 Folgen:

$$\begin{aligned} b_n &:= \sqrt[2n]{2} + (-1)^{2n} + \sin\left(\tfrac{2n\pi}{2}\right) = \sqrt[2n]{2} + 1,\ n > 0, \\ c_n &:= \sqrt[4n+1]{2} + (-1)^{4n+1} + \sin\left(\tfrac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \sqrt[4n+1]{2},\ n \geq 0, \\ d_n &:= \sqrt[4n+3]{2} + (-1)^{4n+3} + \sin\left(\tfrac{(4n+3)\pi}{2}\right) = \sqrt[4n+3]{2} - 2,\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Die 3 Folgen sind Teilfolgen von (a_n) und jedes Folgenglied von a_n kommt in einer der 3 Folgen vor (Jede natürliche Zahl ist entweder durch 2 teilbar oder durch 4 mit Rest 1 oder 3).

c) Da $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ ist, konvergieren alle 3 Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim b_n = 2, \qquad \lim c_n = 1, \qquad \lim d_n = -1.$$

Damit sind 2, 1 und -1 Häufungspunkte von (a_n). Gäbe es einen weiteren Häufungspunkt, so müsste es eine Teilfolge von (a_n) geben, die gegen diesen konvergiert. Diese Folge wäre dann Teilfoge mindestens einer der Folgen (b_n), (c_n), (d_n) und würde damit gegen 2, 1 oder -1 konvergieren. Also gibt es keinen weiteren Häufungspunkt.

a) Da für $x > 0$ gilt $(\sqrt[x]{2})' = -\frac{\ln 2}{x^2} \sqrt[x]{2} < 0$, ist $\sqrt[x]{2}$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $\sqrt[n]{2}$ streng monoton fallend. Also sind die Folgen (b_n), (c_n) und (d_n) streng monoton fallend. Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der 3 Folgen vorkommen gilt

$$\inf\{a_n\} = \inf\{2, 1, -1\} = -1, \qquad \sup\{a_n\} = \sup\{b_1, c_0, d_0\} = b_1 = \sqrt{2} + 1.$$

b) Die Folge (a_n) ist nicht monoton, da sie sonst als beschränkte Folge konvergieren würde und nicht 3 verschiedene Häufungspunkte hätte.

3. Aufgabe

Für den im Quotientenkriterium zu untersuchenden Quotienten gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(n+1)^{n+1}((n+1)!)^2}{(3n+3)!}}{\frac{n^n(n!)^2}{(3n)!}} &= \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^2}{n^n(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{3n+1}\frac{n+1}{3n+2}\frac{n+1}{3n+3}
\end{aligned}$$

Da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\lim \frac{n+1}{3n+1} = \lim \frac{n+1}{3n+2} = \lim \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$ ist, konvergiert der Quotient gegen $\frac{e}{9}$ und das ist, da $e < 3$ ist, kleiner als 1. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

4. Aufgabe

Es gilt

$$\lim \sqrt[n]{\left|(-2)^n \frac{n+1}{(n+2)^2}\right|} = 2\frac{\lim \sqrt[n]{n+1}}{(\lim \sqrt[n]{n+2})^2} = 2.$$

Also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{1}{2}$ und sie konvergiert für alle $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Für $x = \frac{1}{2}$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \frac{n+1}{(n+2)^2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(n+2)^2}$.
Die Folge $\frac{n+1}{(n+2)^2}$ ist streng monoton fallend, da $\frac{n+1}{(n+2)^2} > \frac{n+2}{(n+3)^2}$ genau dann, wenn $n^2+3n+1 > 0$ und $\lim \frac{n+1}{(n+2)^2} = 0$. Damit konvergiert die Potenzreihe für $x = \frac{1}{2}$ nach dem Leibnizkriterium.

Für $x = -\frac{1}{2}$ gilt: für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$(-2)^n \frac{n+1}{(n+2)^2}x^n = \frac{n+1}{(n+2)^2} > \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{1}{4n}$$

Damit ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2}$. Also divergiert die Potenzreihe für $x = -\frac{1}{2}$.

5. Aufgabe

a) Sei $\epsilon > 0$ und für alle $x \in D$, $|g(x)| \leq M$, $M \in \mathbb{R}$ und $\delta := \frac{\epsilon}{M}$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(x-x_0)g(x)| \leq |x-x_0|M < \delta M = \epsilon.$$

Also ist f in x_0 stetig.

b)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)g(x)-(x_0-x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Also ist f in x_0 differenzierbar und die Ableitung ist $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

6. Aufgabe

$\lim_{x\to 0}(1-e^x) = 0$, $\lim_{x\to 0}\tan \pi x = 0$, $(1-e^x)' = -e^x$, $(\tan(\pi x))' = \pi(1+\tan^2(\pi x))$ und dieser Term ist für alle $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ ungleich Null. Weiterhin ist $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\pi(1+\tan^2(\pi x))} = \frac{1}{\pi}$. Also kann man die Regel von Bernoulli–de l'Hospital anwenden und $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\tan(\pi x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\pi(1+\tan^2(\pi x))} = -\frac{1}{\pi}$.

7. Aufgabe

Die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen ist $\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$. Es gilt $f(x)-g(x) = 4x^2-8x+3$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2-8x+3 - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 4x^2-8x+3 + \int_{\frac{3}{2}}^{2} 4x^2-8x+3 \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3-4x^2+3x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{4}{3}x^3-4x^2+3x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{4}{3}x^3-4x^2+3x\right]_{\frac{3}{2}}^{2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

8. Aufgabe

Aus $(a^x)' = a^x \ln a$ folgt $\int a^x = \frac{1}{\ln a}a^x$ und damit

$$\begin{aligned}
\int 2^x \sinh(2x)dx = \int 2^x \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}dx &= \frac{1}{2}\int (2e^2)^x - \left(\tfrac{2}{e^2}\right)^x dx \\
&= \frac{1}{2\ln(2e^2)}(2e^2)^x - \frac{1}{2\ln(\frac{2}{e^2})}\left(\tfrac{2}{e^2}\right)^x + c \\
&= \frac{1}{2\ln(2)+4}(2e^2)^x - \frac{1}{2\ln(2)-4}\left(\tfrac{2}{e^2}\right)^x + c.
\end{aligned}$$

Aus der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ folgt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und damit

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

da $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 < \frac{\pi}{2}$.

Mit partieller Integration folgt

$$\int x^2 e^{2x-\ln x}dx = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$