**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WS 01/02
**Institut für Mathematik** Abgabe: 29.10. i.d. VL
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I

# 1. Übung Analysis I

(Körperaxime, Anordnungsaxiome)

---

## Übungsaufgaben

### 1. Aufgabe

Beweisen Sie, dass direkt aus der Gültigkeit der Körperaxiome für die reellen Zahlen, für $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ folgt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

### 2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass für $a$, $b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $a < b \implies a < \frac{a+b}{2} < b$,

b) $0 < a < b \implies a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

## Tutoriumsvorschläge

### 1. Aufgabe

Beweisen Sie, dass aus den Körperaxiomen die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a + x = b$ für alle $a$, $b \in \mathbb{R}$ folgt. Diskutieren Sie aus der Schule bekannte äquivalente Gleichungsumformungen im Lichte der Körperaxiome, z.B.:

$$\begin{aligned} & 25 + a = a \quad & | -a \\ \Leftrightarrow \quad & 25 = 0 & \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} & 3x^2 - 27 = 0 \quad & | +27 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2 = 27 & | : 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 9 & \\ \Leftrightarrow \quad & \dots & \end{aligned}$$

### 2. Aufgabe

Zerlegen Sie die folgenden Mengen in Intervalle. Verwenden Sie dabei so wenig wie möglich Intervalle. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis auf dem Zahlenstrahl.

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{|x+3|} < \frac{1}{|x-1|} \,\}$, b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x-2|}{x+2} \leq 4 \,\}$.

(Hinweis: Sie müssen Ihr Ergebnis natürlich beweisen.)

## Hausaufgaben

# 1. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen aus den Körper– und Anordnungsaxiomen folgen.

a) $\forall a \in \mathbb{R}\colon\ -(-a) = a.$

b) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}\colon ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$

c) $\forall a,\, b \in \mathbb{R},\, b \neq 0\colon \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0.$

# 2. Aufgabe (5 Punkte)

Zerlegen Sie die folgenden Mengen in Intervalle. Verwenden Sie dabei so wenig wie möglich Intervalle. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis auf dem Zahlenstrahl.

$$\text{a)}\quad \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x+3| < |x-1| + |x-2| \,\},$$

$$\text{b)}\quad \{\, x \in \mathbb{R} \mid \left|\tfrac{1}{x-1}\right| < 2 \,\}, \qquad \text{c)}\quad \{\, x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{|2x-3|} > 5 \,\}.$$

(Hinweis: Sie müssen Ihr Ergebnis natürlich beweisen.)

# 3. Aufgabe (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie einen Beweis.

a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R}\colon a = b + c.$

b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\colon a = b + c.$

Gesamtpunktzahl: 15