TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 5.11.2001
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

2. Übung Analysis I

(Vollständige Induktion)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2 ist.

2. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$.

3. Aufgabe

Seien A_n Aussagen für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus

(i) A_0 ist wahr, und

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \implies A_{n+1}$

folgt: A_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

4. Aufgabe

Die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei rekursiv definiert durch:

$$f(0) := 5, \qquad f(1) := 12; \qquad f(2) := 30 \qquad \text{und}$$
$$f(n+3) := 6f(n+2) - 11f(n+1) + 6f(n).$$

Zeigen Sie, dass $f(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Geben Sie zwei Beweise (mit vollständiger Induktion und mit einem Satz aus der VL) für die Tatsache, dass die n–te Zeilensumme im Pascalschen Dreieck immer gleich 2^n ist.

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(geometrische Summe)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\exists c \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + c.$

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{8}(2n+1)^2.$

(iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\colon 2^n \geq n^2.$

Gesamtpunktzahl: 15