TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 12.11.
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

3. Übung Analysis I

(Komplexe Zahlen, Abbildungen und Mengen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ genau zwei Lösungen besitzt.

2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

3. Aufgabe

Sei $f \colon A \to B$ eine Abbildung zwischen den Mengen A und B. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für $U, V \subset A$:

(i) $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$

(ii) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$

(iii) $f(B \setminus U) \supset A \setminus f(U)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für $U, V \subset B$:

(iv) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

(v) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$

(vi) $f^{-1}(B \setminus U) = A \setminus f^{-1}(U)$

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Drücken Sie $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ durch z und $\bar{z}$ aus.

2. Aufgabe

Welche der folgenden Aussagen über zwei Abbildungen, $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ sind richtig und welche sind falsch? (Beweisen Sie ihre Antwort.)

(i) f, g injektiv $\implies$ $g \circ f$ injektiv.

(ii) $g \circ f$ injektiv $\implies$ f injektiv.

(iii) $g \circ f$ surjektiv $\implies$ g surjektiv.

(iv) f, g bijektiv $\implies$ $g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ein eindeutig bestimmtes Inverses besitzt, schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit x, $y \in \mathbb{R}$ und geben Sie ihren Betrag an.

$$\frac{1}{3+5i}, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \qquad \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \qquad (1+i)^n + (1-i)^n$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über zwei Abbildungen, $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ sind richtig und welche sind falsch? (Beweisen Sie ihre Antwort.)

(i) f, g surjektiv $\implies$ $g \circ f$ surjektiv.

(ii) $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\implies$ g injektiv.

(iii) $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\implies$ f surjektiv.

Gesamtpunktzahl: 15