TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 19.11.
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

4. Übung Analysis I

(Funktionen, Polynome)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\}$ und $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

a) Geben Sie Beispiele für Funktionen ψ mit den oben beschriebenen Eigenschaften an.

Seien a_1, a_2, b_2, $b_1 \in \mathbb{R}$, sodass $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$.

b) Es gilt:

$$\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x) > 0, \text{ für } x \in]a_1, b_1[\text{ und}$$
$$\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x) = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash]a_1, b_1[.$$

c) Es gilt:

$$\psi(a_2 - x) + \psi(x - b_2) > 0, \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2] \text{ und}$$
$$\psi(a_2 - x) + \psi(x - b_2) = 0, \text{ für } x \in [a_2, b_2].$$

d) Die Funktion

$$\varphi(x) := \frac{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x)}{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x) + \psi(a_2 - x) + \psi(x - b_2)}$$

hat die folgenden Eigenschaften

$$\varphi(x) \in [0, 1], \qquad \varphi\big|_{[a_2, b_2]} = 1, \qquad \varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]a_1, b_1[.$$

Eine Funktion mit diesen Eigenschaften nennt man *Buckelfunktion*.

2. Aufgabe

Sei $(]a_i, b_i[)_{i\in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, d.h.

(i) *Überdeckung*: $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$

(ii) *lokal endlich*: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass nur für endlich viele $i \in I$ gilt $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap]a_i, b_i[\neq \emptyset$.

a) Zeigen Sie, dass es dann zu $(]a_i, b_i[)_{i\in I}$ eine *Zerlegung der Eins* gibt, d.h. eine Familie (φ_i) von Funktionen mit den Eigenschaften:

$$\varphi_i\big|_{]a_i, b_i[} > 0, \qquad \varphi_i\big|_{\mathbb{R}\backslash]a_i, b_i[} = 0, \qquad \sum_{i\in I} \varphi_i = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass es für jede Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen $(f_i)_{i\in I}$ gibt, sodass $f_i\big|_{\mathbb{R}\backslash]a_i, b_i[} = 0$, $\sum_{i\in I} f_i = 1$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^7 - x^6 - 6x^5 + 5x^3 - 9x^2 - 16x - 6.$$

(Hinweis: $1 + i$ ist eine Nullstelle.)

2. Aufgabe

Für ein Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ definiert man formal $f'(z) := \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$. Zeigen Sie

a) $(fg)' = f'g + fg'$.

b) Eine k–fache ($k \geq 1$) Nullstelle von f ist eine $(k-1)$–fache Nullstelle von f'.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien $n+1$ verschiedene Stellen $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $n+1$ beliebige Werte $w_0, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
Es gibt eindeutig bestimmte und sukzessiv berechenbare (geben Sie die Rekursionsvorschrift an) Zahlen $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, sodass das Polynom höchstens n–ten Grades

$$P(z) = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}(z - z_0) \cdots (z - z_k)$$

die Interpolationseigenschaft $P(z_k) = w_k$ für $k = 0, \ldots, n$ besitzt. Dieses Polynom nennt man das *Newtonsche Interpolationspolynom* für die Punkte (z_k, w_k).

2. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = (x + 3 - i)(x^4 - 11x^3 - 59x^2 - 11x - 60).$$

(Hinweis: i ist eine Nullstelle.)

Gesamtpunktzahl: 15