TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 26.11.2001
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

5. Übung Analysis I

(Folgen und Grenzwerte)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie $\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$.

2. Aufgabe

Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$. Folgern Sie damit, dass aus $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = b$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = b$.

3. Aufgabe

Beweisen Sie die *Bernoullische Ungleichung*: Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

4. Aufgabe

Sei $q \in \mathbb{C}$. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$(a_n) = (q^n), \qquad (b_n) = (\frac{q^n}{n!}), \qquad (c_n) = \sqrt[n]{n}, \qquad (d_n) = \sqrt[n]{n!}.$$

5. Aufgabe

Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = a.$$

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Untersuchen Sie ob die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

2. Aufgabe

Seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren genau dann, wenn die Folgen (a_n+b_n) und $(a_n - b_n)$ konvergieren.

b) Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) divergieren, so divergieren auch $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$.

c) Die Folge (a_n^2) konvergiert genau dann, wenn $|a_n|$ konvergiert.

d) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen, so konvergiert auch $(\max\{a_n, b_n\})$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Seien (a_n) und (b_n) konvergent und gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n < b_n$, dann gilt $\lim a_n < \lim b_n$.

b) Ist $(a_{n+1} - a_n)$ eine Nullfolge, so konvergiert (a_n).

c) Gelte für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, so ist (a_n) eine Nullfolge.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Durch die Rekursionsformel $a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + 6$ wird nach Vorgabe von $a_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge (a_n) definiert. Für welche a_0 erhält man eine konvergente Folge?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad (b_n) = (\sqrt[n]{n}).$$

(Hinweis: Bernoullische Ungleichung.)

Gesamtpunktzahl: 15