TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 3.12.2001
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I

6. Übung Analysis I

(Folgen, Cauchy–Folgen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\lim x_n = x \Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = x.$$

2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ streng monoton wachsend ist.

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Der gemeinsame Grenzwert ist (per Definition) die *Eulersche Zahl* e. Beweisen Sie, dass $2 \leq e < 3$ gilt.

4. Aufgabe

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$. Zeigen Sie, dass die durch $a_0 = a$, $b_0 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert, das sogenannte *arithmetisch-geometrische Mittel* von a und b, konvergieren.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen reeller Zahlen mit der Eigenschaft: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn $\lim a_n = \lim c_n = a$, dann folgt $\lim b_n = a$

2. Aufgabe

Bestimmen Sie den Grenzwert der untenstehenden Folgen, falls er existiert.

$$\text{a) } a_n = \tfrac{|z|^n - n^s}{|z|^n + n^s}, \qquad \text{b) } b_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},$$

wobei $z \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{Q}$ und a, b, $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) Sei a_n eine Folge zu der es eine Zahl $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ gibt, sodass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Zeigen Sie, dass a_n eine Cauchy–Folge ist.

b) Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zu der es eine Zahl $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ gibt, so dass für alle x, $y \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| \leq q|x - y|.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $F(a) = a$ ist. Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_{n+1} = F(a_n)$. Zeigen Sie, dass $\lim a_n = a$ ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert der untenstehenden Folgen, falls er existiert.

$$\text{a) } a_n = \tfrac{1}{2^n}\tbinom{n}{k}, \qquad \text{b) } b_n = \left(\tfrac{3+3i}{5}\right)^n, \qquad \text{c) } c_n = \sqrt[n]{|P(n)|},$$

wobei P ein beliebiges Polynom mit höchstem Koeffizient p ist.

Gesamtpunktzahl: 15