TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 10.12.02
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I

7. Übung Analysis I

(Zahlenreihen)

Die Klausur findet am 13.2.02 von 8-10 Uhr statt. Die Raumaufteilung wird noch bekannt gegeben. Am Anfang des SS 02 wird es eine Nachklausur geben.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

2. Aufgabe

a) Beweisen Sie das *Verdichtungskriterium*: Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$?

3. Aufgabe

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(1 - \sqrt[n]{a}),\ a \in \mathbb{R}_{>0}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, .

2. Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ folgt.

b) Sei $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Konvergiert dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)(n+2)}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\, q^n,\ q \in \mathbb{C}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass die Folge (r_k) mit $r_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ eine Nullfolge ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $b_n > 0$ und $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Gesamtpunktzahl: 15