8. Übung Analysis I

(Potenzreihen, Stetigkeit)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Identitätssatz für Potenzreihen:
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien r_1 und r_2. Seien f und g die durch diese Potenzreihen auf $U_{r_1}(x_0)$ und $U_{r_2}(x_0)$ definierten Funktionen und gelte für eine gegen x_0 konvergente Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$:

$$f(x_n) = g(x_n).$$

Dann stimmen f und g auf $U_{r_1}(x_0) = U_{r_2}(x_0)$ überein und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ und damit $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

3. Aufgabe

Seien f und g stetige Funktionen. Beweisen Sie direkt mit der Definition der Stetigkeit, dass die Funktionen $f \circ g$, $f + g$ und $f \cdot g$ stetig sind.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen absolut?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{n!} x^n, \; s \in \mathbb{R},$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-i)^{4n}.$

2. Aufgabe

Sei $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine dehnungsbeschränkte Funktion. d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Beweisen Sie, dass f auf D stetig ist. (Ist f auch gleichmäßig stetig?)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen absolut?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} x^n,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2 + i}(x - 3 + 4i)^n,$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2).$

Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}$.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Für die Koeffizienten c_n einer Potenzreihe gelte $0 < a \leq c_n \leq b$. Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $p \in D$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in p ist, wenn für jede gegen p konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim f(x_n) = f(p)$. (Verwenden Sie dabei keine Sätze aus der Vorlesung, die dort nicht bewiesen wurden.)

Gesamtpunktzahl: 15