TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 7.1.02
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

9. Übung Analysis I

(Grenzwerte von Funktionen, stetige Funktionen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie α, $\beta \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta)=0.$$

2. Aufgabe

Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es sei $f(0) = f(1)$. Dann gibt es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

3. Aufgabe

Sei C das *Cantorsche Diskontinuum*:

$$C=\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n, \quad C_0=[0,1], \quad C_{n+1}=\tfrac{1}{3}C_n\cup\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\right).$$

a) $C_{n+1} \subset C_n$, $C \subset [0,1]$ und C ist abgeschlossen.

b) C besteht aus den Zahlen der Gestalt

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \quad \text{mit } a_n=0 \text{ oder } a_n=2.$$

Sei $\varphi(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$.

c) $\varphi\colon C \to [0,1]$ ist eine surjektive, streng monoton wachsende, stetige Abbildung.

d) φ besitzt eine stetige Fortsetzung $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die auf jedem offenen Intervall I in $[0,1] \setminus C$ konstant ist.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zeigen Sie direkt mit Hilfe der ϵ–δ–Definition der Stetigkeit, dass

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, mit n, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie direkt mit Hilfe der ϵ–δ–Definition der Stetigkeit, dass

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ stetig ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x,\ a, b \in \mathbb{R}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left[\frac{1}{x}\right]$.

$[\cdot]$ ist hier die Gauß–Klammer. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $[x] := \max\{\, z \in \mathbb{Z} \mid x \geq z \,\}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Jede Funktion $f\colon [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt. Ein Punkt $\xi \in [a, b]$ heißt Fixpunkt, falls $f(\xi) = \xi$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 15