10. Übung Analysis I

(Stetigkeit, Exponentialfunktion)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion.

a) Sei (a_n) eine Cauchy–Folge in A. Dann ist auch $(f(a_n))$ eine Cauchy–Folge.

b) Sei $p \in \mathbb{R} \setminus A$ ein Randpunkt von A. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Fortsetzung von f in p gibt, d.h. es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $q \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $\tilde{f}\colon A \cup \{p\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}\big|_A = f$ und $\tilde{f}(p) = q$ stetig ist.

2. Aufgabe

a) Die Funktion $\ln x$ wächst und fällt für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ langsamer als $x \mapsto x^\alpha$.

b) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = 1$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Haben folgende Funktionen ein Maximum bzw. Minimum?

$$f\colon [3,17] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{e^x} - \sin(2x), \qquad g\colon]0,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

2. Aufgabe

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$ die Umkehrfunktion $\log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a}$ („Logarithmus zur Basis a“) besitzt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen haben ein Maximum bzw. Minimum?

$$f\colon [-5, \sqrt{2}] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^5 - x^2}{x^4 + 1}, \qquad g\colon [-2, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-5x},$$

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(1-x)} & \text{für } x \in]0,1[\\ 0 & \text{für } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

2. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt eine positive Lösung $x^* \in [0, \infty[$ der Gleichung $\cos(200x) = e^x - 1$ für die $x^* \leq 0.01$ gilt, und es gibt nur eine solche Lösung.

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

b) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to H^1 := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) = 1, \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$, $x \mapsto \cosh(x) + i \sinh(x)$ ebenfalls bijektiv ist.

Gesamtpunktzahl: 15