# 11. Übung Analysis I

(Polarkoordinaten, Differntiation I)

---

## Übungsaufgaben

## 1. Aufgabe (Polarkoordinaten)

a) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi[$, sodass

$$z = re^{i\varphi}.$$

$r$ und $\varphi$ heißen *Polarkoordinaten (Betrag und Argument) von $z$* und man definiert $\arg\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi[$, $z \mapsto \arg(z) := \varphi$. Dann gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right), & \mathrm{Im}\, z \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right), & \mathrm{Im}\, z < 0. \end{cases}$$

b) Man erhält das Produkt bzw. den Quotienten zweier komplexer Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert bzw. dividiert und ihre Argumente addiert bzw. subtrahiert.

c) Schreiben Sie $i$, $1 + i$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ in Polarkoordinaten.

## 2. Aufgabe (Fermatsches Prinzip und Brechungsgesetz)

In zwei homogenen ebenen durch eine gerade Linie getrennten Medien seien die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Licht $v_1$ und $v_2$. Sei $A$ ein Punkt in dem einen Medium und $B$ ein Punkt in dem anderen. Zeigen Sie, dass aus dem Fermatschen Prinzip: „Licht, dass von $A$ nach $B$ geht, nimmt den Weg, auf dem es die geringste Zeit benötigt.“ das Brechungsgesetz von Snellius folgt:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

dabei sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Winkel zwischen den Bewegungslinien des Lichts und der Grenzlinie der beiden Medien.

## Tutoriumsvorschläge

# 1. Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

a) $x \mapsto e^{ax+b},\ a, b \in \mathbb{R}$, b) $x \mapsto \tanh x$, c) $x \mapsto x^x$, d) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

# 2. Aufgabe

Seien $f,\ g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

a) aus $f(a) \le g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für $x \in ]a, b[$ folgt $f(x) < g(x)$ für $x \in ]a, b]$.

b) aus $f(a) < g(a)$ und $f'(x) \le g'(x)$ für $x \in ]a, b[$ folgt $f(x) < g(x)$ für $x \in [a, b]$.

c) $\tan x > x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

## Hausaufgaben

# 1. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ alle Lösungen der Gleichung

$$z^k = a.$$

(Schreiben Sie $a$ in der Form $re^{i\varphi}$ und bestimmen Sie die Polarkoordinaten der Lösungen.)

# 2. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

a) $x \mapsto a^{x^x},\ a > 0$, b) $x \mapsto \sin^x x$, c) $x \mapsto e^{cx^2},\ c \in \mathbb{R}$,

d) $x \mapsto \ln(a|x|)$, e) $x \mapsto \dfrac{(1 + x)e^x}{2 + x^2}$.

# 3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $c,\ s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $s' = c$ und $c' = -s$. Zeigen Sie

a) Aus $s(0) = 0$ und $c(0) = 0$ folgt $c = s = 0$. (Hinweis: Betrachten Sie $s^2 + c^2$.)

b) Aus $s(0) = 0$ und $c(0) = 1$ folgt $s = \sin$ und $c = \cos$. (Hinweis: Betrachten Sie $s - \sin$ und $c - \cos$.)

Gesamtpunktzahl: 15