TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 28.1.02
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

12. Übung Analysis I

(Differentiation I, Taylorreihe)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n e^{-x}$$

genau ein lokales und genau ein absolutes Maximum besitzt.

2. Aufgabe

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Bestimmen Sie die Taylorreihe der durch die Potenzreihe auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ definierten Funktion im Entwicklungspunkt x_0.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

in $x_0 = 0$. Wo konvergiert Sie gegen f? Bestimmen Sie $f(1)$ bis auf einen absoluten Fehler von $0,001$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren oder $\pm\infty$ sind.

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x(\tan(x)+1)}{\arctan x},\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\ln|x|\sin(x),\qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}.$$

2. Aufgabe

a) Entwickeln Sie

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{1+x}$$

um $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Wo stellt diese Taylorreihe die Funktion dar? (Diskutieren Sie 2 Lösungswege: Satz über die Taylorapproximation, Verwendung einer bekannten konvergenten Reihe.)

b) Geben Sie das Taylorpolynom von f an, welches f auf $]-0,1;0,1[$ bis auf $0,001$ approximiert.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (7 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren oder $\pm\infty$ sind.

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x,\quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{2x+3},\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1},\quad \text{d)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\cos(e^{2x})}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Untersuchen Sie die lokalen und globalen Extrema von

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3+ax^2+bx,\ a,\ b\in\mathbb{R}$,

b) $g\colon]0,\infty[,\ x\mapsto \frac{\ln^2 x}{x}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das 9. Taylorpolynom in $x_0=\frac{\pi}{4}$ von $f(x)=\cos(2x)$ die Funktion f auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ bis auf $0,001$ approximiert. Geben Sie das 9. Taylorpolynom an.

Gesamtpunktzahl: 15