TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 01/02
Institut für Mathematik Abgabe: 4.2.2002
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS01/Analysis_I`

13. Übung Analysis I

(Regelfunktionen, Integration durch Approximation mit Treppenfunktionen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Zeigen Sie durch Approximation mit Treppenfunktionen:

$$\text{a)} \int_a^b dx = b - a, \qquad \text{b)} \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

2. Aufgabe (Trapezregel)

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Sei $g(x)$ das Polynom 1. Grades, dessen Graph durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ geht. Bestimmen Sie

$$\int_a^b g(x)dx$$

in Abhängigkeit von a, b, $f(a)$ und $f(b)$.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei x_j, $j = 0, 1, \dots, n$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ der Feinheit $\frac{b-a}{n}$. Sei g diejenige stetige Funktion, die auf jedem Intervall $[x_j, x_{j+1}]$ ein Polynom 1. Grades ist und für die $f(x_j) = g(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$ gilt.

b) Bestimmen Sie

$$T_f(n) := \int_a^b g(x)dx$$

in Abhängigkeit von a, b, n, $f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

c) Zeigen Sie

$$\lim T_f(n) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Aufgabe

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktionen und $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die sich von f nur in endlich vielen Punkten unterscheidet. Zeigen Sie, dass g auch eine Regelfunktion ist und $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zeigen Sie durch Approximation mit Treppenfunktionen:

a) $\int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3,$ b) $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x,\ x \geq 1,$ c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \ln(2).$

(Hinweis zu b): Verwenden Sie die Zerlegung $t_k := x^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n$.)

2. Aufgabe

Seien a, b, c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Bestimmen Sie

$$\int_a^b c_1 x^2 + c_2 x + c_3 dx.$$

(Verwenden Sie die Ergebnisse aus der ersten Tutoriums– und der ersten Übungsaufgabe.)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Approximation mit Treppenfunktionen:

a) $\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$

(Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung: $t_0 = 0$, $t_k = x(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n-k}$, $k = 1, \ldots, n$.)

2. Aufgabe **(Simpsonregel)** (10 Punkte)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Sei $g(x)$ das Polynom 2. Grades, dessen Graph durch die Punkte $(a, f(a))$, $\big(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\big)$ und $(b, f(b))$ geht. Bestimmen Sie $\int_a^b g(x)dx$ in Abhängigkeit von a, b, $f(a)$, $f(\frac{a+b}{2})$ und $f(b)$.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei x_j, $j = 0, 1, \ldots, 2n$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ der Feinheit $\frac{b-a}{2n}$. Sei g diejenige stetige Funktion, die auf jedem Intervall $[x_{2i}, x_{2(i+1)}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ ein Polynom 2. Grades ist und für die $f(x_j) = g(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$ gilt.

b) Bestimmen Sie

$$S_f(n) := \int_a^b g(x)dx$$

in Abhängigkeit von a, b, n, $f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$.

c) Zeigen Sie

$$\lim S_f(n) = \int_a^b f(x)dx.$$

d) Sei p ein Polynom 3. Grades. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$S_p(n) = \int_a^b p(x)dx.$$

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit Hilfe der Intervall–Additivität des Integrals, dass es genügt die Aussage für $n = 1$ zu zeigen.)

Gesamtpunktzahl: 15