WS 2001
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Vorrechnen in der Übung am 14.01.02)
Wir betrachten auf diesem Übungsblatt das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{aligned} -c(s)y''(s) &= u(s), \quad s \in (0,\gamma) && (1)\\ y(0) &= \alpha, && (2)\\ y(\gamma) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

mit $y \in C^2(0,\gamma), c, u \in C(0,\gamma), c > 0$ auf $(0,\gamma), \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ und wollen einige typische Kontrollprobleme analysieren. Dazu betrachten wir (1-3) als einfaches Beispiel für ein System, das wir durch vier Größen beeinflussen können:

(i) Durch die Koeffizientenfunktion c

(ii) oder die rechten Seite u in der DGL (1),

(iii) durch den Randwert α in (2),

(iv) oder das rechte Intervallende γ in (1) und (3).

Die drei anderen Parameter lassen wir jeweils fest; in den letzten drei Fällen setzen wir dann der Einfachheit halber $c \equiv 1$, in den ersten drei $\gamma = 1$.
Ziel ist, dass die Lösung y des RWPs (1-3) im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ *möglichst genau* mit einer beliebigen, fest vorgegebenen Funktion $z \in C(0, \frac{1}{2})$ übereinstimmt.
Man spricht in (ii) auch von verteilter Kontrolle, in (iii) von Randkontrolle und in (iv) von Formoptimierung (da man hier sozusagen die Form des Gebietes verändert).

1. (2 P.)
   Schreibe vier zu (i)-(iv) gehörende Optimierungsprobleme auf. Finde eine gemeinsame geeignete Zielfunktion (sie sollte möglichst differenzierbar sein). Wie kann man den Ausdruck *"möglichst genau"* mathematisch ausdrücken?

Da wir uns in der VL mit der Optimierung im $\mathbb{R}^n$ befassen, diskretisieren wir das RWP zuerst einmal:

2. (2+1+1 P.)

   (a) Diskretisiere (1-3) für $c \equiv 1, \gamma = 1$ mit finiten Differenzen, d.h. betrachte das Problem nur an den diskreten Punkten $s_i = ih, i = 0, \ldots, N, h = 1/N$ mit $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Die zweite Ableitung wird dabei durch den sog. *zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung*,

   $$D_{2h}y(s) \;:=\; \frac{y(s+h) - 2y(s) + y(s-h)}{h^2}, \qquad (4)$$

   approximiert. Setze $y_i \approx y(s_i), u_i$ analog, und gib die Matrix und rechte Seite des sich ergebenden linearen Gleichungssystems $Ay = b$ an.

   (b) Was ändert sich, wenn c nicht konstant gesetzt wird? Setze $c_i = c(s_i)$.

(c) Betrachtet man das RWP auf einem variablen Gebiet $(0, \gamma)$ wie in Problem (iv), so ist es am geschicktesten, ebenfalls eine feste Anzahl von Gitterpunkten zu verwenden, also entweder das RWP auf das Intervall $(0, 1)$ zu transformieren oder eine andere Schrittweite h in (4) zu verwenden. Wie sieht in diesem Fall das zugehörige lineare Gleichungsystem aus?

Jetzt können wir die vier Optimierungsprobleme aus Aufgabe 1 in der Form schreiben, die wir aus der VL kennen. Dabei können wir uns den *Zustand* y und die jeweilige *Kontrollvariable* c, u, α oder γ zu einer Unbekannten x zusammengefasst vorstellen. Diese Unbekannte x entspricht dann dem x aus den Beispielen der VL.

3. (5 P.)
   Schreibe die Optimierungsprobleme (i)-(iv) in diskretisierter Form und charakterisiere sie in Bezug auf (Nicht-)Linearität der Zielfunktion und auf Nebenbedingungen. Wo stecken jeweils die zu optimierenden Größen c, u, α bzw. γ? Welche der vier diskretisierten Probleme kann man zu einer Klasse zusammenfassen? Setze $z_i = z(s_i)$.

4. (3 P.)
   Schreibe für die Probleme (i)-(iv), die nur Gleichungsnebenbedingungen haben, die zugehörige Lagrange-Funktion L und das sich ergebende Optimalitätsystem auf. Als Optimalitätsystem bezeichnet man die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für stationäre Punkte der Lagrange-Funktion.

5. (2 P.)
   Überprüfe, ob oder wann für die Probleme aus Aufgabe 4 die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung aus Satz 5.4.5 der VL erfüllt ist.

Die hier behandelten Probleme kommen in der Praxis in (fast) beliebig komplizierter Form vor:

- Es können für c und u auch nicht so glatte Funktionen zugelassen sein.
- Das Gebiet kann mehrdimensional sein.
- Es kann eine Zeitabhängigkeit hinzukommen.
- Die DGL kann nichtlinear sein.
- Die Zielfunktion kann nichtquadratisch oder nichtdifferenzierbar sein.
- Die Daten z können nur an wenigen, diskreten Punkten vorliegen.
- ...