Musterlösungen zur Probeklausur Analysis I

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 < 3^n$?

   Für $n = 0, 1, 2$ ist die Aussage richtig, wie man nachrechnet.
   Es wird nun behauptet:
   Für sämtliche $n \geq 4$ gilt die Ungleichung $n^3 < 3^n$.
   <u>Induktionsanfang:</u> $n = 4$: $64 = 4^3 < 3^4 = 81$, d.h. hierfür ist die Aussage richtig.
   <u>Induktionsannahme:</u> Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte: $n^3 < 3^n$.
   <u>Induktionsschritt:</u> Zu zeigen bleibt: $(n+1)^3 < 3^{n+1}$.
   Die Ungleichungskette

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \overset{\text{Ind.Ann}}{>} n^3 \cdot 3 = n^3 + n^3 + n^3 \overset{n>3}{>} n^3 + 3n^2 + n^3 \overset{n\geq 4}{\geq} n^3 + 3n^2 + 4n^2 \tag{1}$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n^2 + n^2 \overset{n\geq 1}{\geq} n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \tag{2}$$

   liefert bereits die Behauptung. Zusammenfassend wurde festgestellt:
   Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{3\}$ gilt $n^3 < 3^n$.

2. Für relle $a, b > 0$ gilt $\left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2 \leq ab$.

   Man kann wie folgt verfahren:

$$\begin{array}{lll} a, b > 0; \quad (a-b)^2 \geq 0 & \Rightarrow ab(a-b)^2 \geq 0 & \Rightarrow ab((a+b)^2 - 4ab) \geq 0 \\ \Rightarrow ab(a+b)^2 \geq (2ab)^2 & \Rightarrow ab \geq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 & \Rightarrow ab \geq \left(\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2. \end{array}$$

   Es gibt andere, ähnliche Herleitungen. Wichtig ist, daß man von einer, „offensichtlich richtigen Ungleichung“, etwa wie oben $ab(a-b)^2 \geq 0$ die Behauptung ableitet.
   Alternativ benutze man die Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Es folgt durch ein Einsetzen: $a \to \frac{1}{a}, b \to \frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \leq \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2 \leq ab.$$

3. Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

   Durch geschicktes Erweitern im Zähler und Nenner mit $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}$ erreicht man

$$a_n = \left(\frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\right)n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{1+1} = 1. \tag{3}$$

4. Man zeige, daß die Folge $a_0 = 1/4; \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1/4$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist und berechne anschließend den Grenzwert für $n \to \infty$.

   Zunächst die Monotonie:

   $$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1/4 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

   Daraus folgt $a_n \leq a_{n+1}$.
   Alternativ zeigt man $a_0 = 1/4 \leq 5/16 = (1/4)^2 + 1/4 = a_1$ und schließt unter der Induktionsannahme $a_n \leq a_{n+1}$ auf

   $$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n^2 \leq a_{n+1}^2 \Rightarrow a_n^2 + \frac{1}{4} \leq a_{n+1}^2 + frac14 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}. \tag{5}$$

   Nun zur Beschränktheit, wo gezeigt wird: $a_n \leq 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (Aus der Aufgabenstellung ist ersichtlich, daß der nachzuweisende Grenzwert das Supremum der Folge sein muß. Um auf die Schranke 1/2 zu kommen, hätte man etwa „verbotenerweise "zunächst den Grenzwert berechnen können, um sich ein Bild von einer oberen Schranke zu machen. Nicht jede große Zahl, d.h ≥ 1 läßt sich unmittelbar als obere Schranke feststellen.)
   Offenbar gilt $a_0 \leq 1/2$. Gilt für ein n die Beziehung $a_n \leq 1/2$, so folgt $a_{n+1} = a_n^2 + 1/4 \overset{\text{Ind.Ann.}}{\leq} (1/2)^2 + 1/4 = 1/2$, womit die obere Schranke gefestigt ist.
   Es sei nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$. Folglich ist

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{4}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{4} \tag{6}$$

   $$\Rightarrow a = a^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

5. Für welche $x \in \mathbb{R}^*$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$?

   Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q := \left(x + \frac{1}{x}\right)$. Die Reihe konvergiert also genau für alle $x \in \mathbb{R}^*$ mit $|x + \frac{1}{x}| < 1$. Diese Werte sind zu bestimmen. Hierfür seien drei Wege vorgeschlagen:

   (a) Für $x > 0$ gilt mindestens eine der beiden Möglichkeiten

   $$x \geq 1 \text{ oder } \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 1. \tag{8}$$

   Für $x < 0$ schließt man entsprechend:

   $$x \leq -1 \text{ oder } \frac{1}{x} \leq -1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -1. \tag{9}$$

   (b) Man schließt mit der Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel für $x > 0$ zunächst:

   $$1 = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right) \Rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{x}. \tag{10}$$

   Ist $x < 0$, dann ist $-x > 0$, also mit dem eben bewiesenen $2 \leq -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$, folglich $x + \frac{1}{x} \leq -2$.

(c) Die Bedingung $|x + \frac{1}{x}| < 1$ wird mit der äquivalenten Ungleichung $-1 < x + \frac{1}{x} < 1$ ausgewertet.
Ist $x > 0$, dann liefert die rechte Ungleichung:

$$x + \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - x < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{3}{4}, \tag{11}$$

also etwas Unerfüllbares. Entsprechend für $x < 0$ kommt aus der linken Ungleichung

$$-1 < x + \frac{1}{x} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 0 > x^2 + x + 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{12}$$

eine Absurdität.

Die Bedingung $|x + \frac{1}{x}| < 1$ ist für kein $x \in \mathbb{R}^*$ erfüllbar. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}^*$.

6. Es sei $M := \{1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} | m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(a) Mit Begründung sind $\sup M, \inf M$ anzugeben.

Es ist $\sup M = 2, \quad \inf M = 0$ nachzuweisen. Zunächst ist $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1 + 1 = 2$, bzw. $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq 1 - 1 = 0; \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Damit sind 2 bzw. 0 obere bzw. untere Schranken. Weiter ist sind die Folgen $a_m = 2 - \frac{1}{m} \in M$ konvergent gegen 2 bzw. $b_n = \frac{1}{n} \in M$ konvergent gegen 0. Daraus folgen die Behauptungen.

(b) Man bestimme die Menge der Häufungspunkte und zeige, daß es sich tatsächlich um Häufungspunkte handelt.

Mit H sei die Menge der Häufungspunkte von M bezeichnet. Dann wird

$$H = \left\{1\right\} \cup \left\{1 - \frac{1}{m} \middle| m \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} \tag{13}$$

behauptet.
Zur Begründung: Die für festes n gegebene Folge $a_m^{(n)} = 1 + 1/n - 1/m$ konvergiert gegen $1 + 1/n$, aber es ist $a_m^{(n)} \neq 1 + 1/n$ für alle $m \in \mathbb{N}^*$. Damit ist $1 + 1/n$ Grenzwert einer Folge aus M deren Glieder sämtliche nicht mit $1 + 1/n$ übereinstimmen. Entsprechend ist $1 - 1/m$ Grenzwert einer Folge aus M, nämlich $b_n^{(m)} = 1 + 1/n - 1/m$ mit festem m. Offenbar gilt $b_n^{(m)} \neq 1 - 1/m$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Ist $m = 2n$, dann ist die Folge $c_n = 1 - 1/(2n) \in M$ konvergent gegen 1, aber sämtliche Glieder sind von 1 verschieden. Damit ist auch 1 Häufungspunkt von M. Fertig.

7. (a) Für $a \in \mathbb{R}$ berechne man den Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$.

Aus der Übung ist bekannt, daß gilt:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ Summanden}}; \quad a \in \mathbb{R}, n \geq 2; x \neq a. \tag{14}$$

Man kann diese Formel alternativ mit Polynomdivision gewinnen, wenn sie nicht auswendig gelernt werden möchte.
Für $x \to a$ ist daher

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-2}a + \ldots + a^{n-1} = na^{n-1}. \qquad (15)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. Zu zeigen ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

In der $\varepsilon - \delta$- Formulierung ist zu begründen:
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für $|x - 0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Man wähle $\delta := \sqrt{\varepsilon} > 0$. Dann gilt für $|x| < \delta$:

$$|f(x)| \leq |x^2| < \delta^2 \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon, \qquad (16)$$

also $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Alternativ kann man auch $\delta := \min(1, \varepsilon)$ wählen. Die Abschätzung (16) kann übertragen werden.