Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

WS 02/03

10. Übung " Analysis I "

1.) **(Gleichmässige Stetigkeit)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmässige Stetigkeit im Definitonsbereich $D = \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
(b) $g(x) = x^2$.

Untersuchen Sie dasselbe Problem für die Einschränkungen $f|_{[a,b]}, \quad g|_{[a,b]}$, wobei $a < b$ beliebige Zahlen sein mögen.

2.) **(Stetige Fortsetzung)**

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen und setzen Sie diese überall, wo es möglich ist, stetig fort.

(a) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-x+2}$.
(b) $g(x) = \frac{\exp(x)-1-x}{x^2}$.

3.) **(Ein Äquivalenzsatz)**

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz. *Es sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist injektiv.*
(ii) *f ist streng monoton.*

4.) **(Ein Grenzwert)**

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Aufgabe 4 aus dem 7. Übungsblatt folgende Ungleichung ab:

$$\forall x > 1 : \quad \log \frac{x+1}{x} \le \frac{1}{x} \le \log \frac{x}{x-1}.$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$u_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{pn}, \quad n \ge 1, \quad p \in \mathbb{N}^* \text{ fest.}$$

5.) **(Tangens hyperbolicus nebst Umkehrfunktion)**

Der Tangens hyperbolicus ist definiert durch

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

(a) Zeigen Sie: $\tanh x$ ist streng monoton wachsend.

(b) Beweisen Sie: $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x = 1; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1.$

(c) Die Funktion tanh bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $]-1,1[$ ab und für die Umkehrfunktion, den sog. Area Tangens hyperbolicus gilt:

$$\operatorname{Artanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

(d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen tanh und Artanh.

Zusatzaufgabe: Existieren monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?

Abgabe: 13.1-17.1.2003, in den Tutorien.

Erinnerung:
Die Klausur findet statt am 20.2.03 von 13-15 Uhr im H 105. Die Nachklausur wird am 9.4.03 von 11-13 Uhr im H 105 geschrieben.