Technische Universität Berlin WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

12.Übung „Analysis I “

1.) **(Einheitswurzeln)**
Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1} = \begin{cases} n & , \quad \zeta = 1 \\ 0 & , \quad \zeta \neq 1. \end{cases}$$

2.) **(Trigonometrische Funktionen)**

(a) Zeigen Sie folgende Aussagen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}.$$

$$\forall x \in (-1; 1) : \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

(b) Zeigen Sie durch Übergang zum Komplexen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x.$$

(c) Fertigen Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) für cos und sin eine Wertetabelle mit den Werten $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ an.

3.) **(Ableitungen)**
Geben Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an, bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $x^2 e^x$ (b) $\ln(\ln x))$ (c) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}$ (d) Artanh x.

(e) $\frac{\sqrt{x} \sin x}{\ln x}$ (f) $x^3 \ln(x^2 + a^2) - \frac{2}{3} x^3 + 2a^2 x - 2a^3 \arctan \frac{x}{a}, \quad a \neq 0.$

(g) $x^{(a^x)}, a > 0$ (h) $a^{\tan x} + \tan(a^x), a > 0$ (i) $\ln(\sqrt{x + \sqrt{x}}) \tan x.$

4.) **(Logarithmische Ableitungen)**
Beweisen Sie die Regel der logarithmischen Ableitung:
Sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$, so ist

$$\left(\frac{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n}\right)(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k'}{f_k}\right)(x).$$

5.) Es sei $r > 0$ und $f, g :]-r, r[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Weiter gelte $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie: $g(0) \neq 0$.

Abgabe: 27.1- 31.1. 03, in den Tutorien.