Technische Universität Berlin WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI

14.Übung „Analysis I “

1.) **(Kurvendiskussion)**
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in ihrem Definitonsbereich auf Extrema, Monotonie, ggf. auf Konvexität, berechnen Sie saemtliche Grenzwerte und fertigen Sie eine Skizze an:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; \qquad g(x) = x^x; \qquad .$$

2.) **(Grenzwerte)**
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{x}; \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}; \quad \lim_{m\to\infty} \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \quad .$$

3.) **(Eine zusammengesetzte C^∞ Funktion)**
Vorgegeben sei die Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$.

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit von f im Nullpunkt.

(b) Zeigen Sie, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und daß für $x > 0$ gilt $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} x^{-2n} P_n(x)$, mit einem Polynom vom Grade $n-1$. Geben Sie eine Rekursionsformel für P_n an.

4.) **(Reste der Exponentialreihe)**

(a) Es sei $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$, die mit einem Polynom $(n-1)$-ten Grades an $n+1$ Stellen $x_1 < \ldots < x_{n+1}$ übereinstimmen möge. Dann hat $f^{(n)}$ im Intervall der beiden äußersten gemeinsamen Nullstellen mindestens eine Nullstele.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist zu zeigen, daß der Reihenrest der Exponentialfunktion $r_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$ für $x = 0$ verschwindet, sonst aber für keinen weiteren reellen Punkt.

5.) **(Fixpunkte, die durch Rekursionen gewonnen werden)**
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir unterstellen die Existenz mindestens einer Lösung x_0 der Gleichung $x = f(x)$ und erklären, falls dies sinnvoll ist, eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch u_0 mit $a \le u_0 \le b$ und $u_n = f(u_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Für alle $x \in [a,b]$ gelte $f'(x) \in [0,1]$. Zeigen Sie, daß stets $u_n \in [a,b]$ gilt und u_n monoton gegen x_0 konvergiert.

(b) Vorausgesetzt es gelte $f'(x) \in [-1,0] \quad \forall x \in [a,b]$ und $u_1 \in [a,b]$. Zeigen Sie erneut: $u_n \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie weiter, daß die beiden Teilfolgen $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen Lösungen der Gleichung $(f \circ f)(x) = x$ konvergieren. Zeigen Sie schlussendlich, daß die letzte Gleichung, außer x_0, keine weitere Lösung besitzt, falls der folgende Fall eintritt:

   i. $\forall x \in [a,b], f'(x) \in]-1,0]$.

(c) In einer Umgebung U von x_0 gelte $\inf\limits_{x\in U} f'(x) > 1$. Weisen Sie nach, daß $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x_0 konvergiert, es sei denn $u_n = x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(d) Wir nehmen nunmehr an $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = k < 1$. Nur in Abhängigkeit von $b-a, k$ und n soll eine Majorante von $|u_n - x_0|$ gegeben werden. Geben Sie eine Gewünschte an.

(e) Es sei $f \in C^2([a,b])$ und über die Ableitungen sei bekannt, daß gilt: $f'(x_0) = 1, \quad f''(x_0) > 0$. Garantiert man die Existenz einer hinreichend kleinen Umgebung V von x_0, in dem $u_0 < x_0$ in V liegt, so konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erneut gegen x_0. Versuchen Sie hinreichende Bedingungen für V zu geben und beweisen Sie die Konvergenzbehauptung.

(f) Es sei weiterhin $f \in C^2([a,b])$ und $x_1 \in [a,b]$ sei ein Punkt mit $f'(x_1) > 0$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to x_1} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_1)} - \frac{1}{(x - x_1) f'(x_1)} \right).$$

Folgern Sie hieraus, daß falls $f'(x_0) = 1, f''(x_0) > 0$ und $u_0 \in V \cap]-\infty, x_0[$ besteht, dann auch gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n(u_n - x_0) = -\frac{2}{f''(x_0)}.$$

6.) **(Eine ungewohnte Charakterisierung von Polynomen)**
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und zu jedem $x \in [0,1]$ existiere ein $n = n(x)$ mit $f^{(n)}(x) = 0$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom. Gilt die Aussage noch, wenn man nur noch fordert: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = 0$?

Dieses Blatt bekommen sie in die Ferien mit. Es wird von den Tutoren nicht mehr korrigiert. Die Übungen 4.),5.)- mit Ausnahmen von gewissen Teilen aus Aufgabe 5.)- scheinen von erhöhtem Schwierigkeitsgrad zu sein, Aufgabe 6.) ist mit Sicherheit sehr schwer. Die ersten drei Aufgaben sind Standard. Auch wenn Sie nicht immer zu einer Lösung kommen, so lohnt sich eine Auseinandersetzung allemal.