**Technische Universität Berlin** WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2

# 3. Übung "Analysis I "

1.) Leiten Sie folgende Aussagen aus den Anordnungsaxiomen ab:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $2ab \leq a^2 + b^2$.
(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$.
(c) kdvi Für alle $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $0 < \lambda < 1$ ist: $a < \lambda a + (1-\lambda)b < b$.
(d) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d > 0$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ folgt: $\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$.
(e) Gilt für jedes $\epsilon > 0$ die Beziehung $0 \leq a \leq \epsilon$, so ist $a = 0$.

2.) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $|3 - 2x| < 5$.
(b) $x(2 - x) > 1 + |x|$.

3.) Es sei $a > 0$ fixiert. Bestimmen Sie zu folgenden Ungleichungen die Lösungsmenge bei vorgegebenen Grundbereich:

(a) $\frac{|x|}{a} - \frac{5a}{x} < 4, \quad x \in \mathbb{R}^*$.
(b) $|x||y| \leq \frac{1}{2}((\frac{x}{a})^2 + (ya)^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.) Verifizieren Sie:

(a) Aus $0 \leq s \leq t$ folgt: $\frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t}$.
(b) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

5.) Es seien $a_j, b_k \in \mathbb{R}; j, k = 1, \ldots, n$.

(a) Zeigen Sie: $\sum\limits_{j,k=1}^{n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) = 2[n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k - (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k)]$.
(b) Leiten Sie aus (5a) die sog. Tschebyscheff Ungleichung her:
Für $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n, \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ gilt:

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \leq \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big).$$

Abgabe: 11.11. - 15.11.2002, in den Tutorien.

Wir möchten Sie noch an unsere Sprechzeiten erinnern:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dozent: | Prof.Dr. G. Frank | MA 827 | Do. 10.00-11.30 |
| Sekretariat: | R. Schubert | MA 828 | Mo-Fr. außer Mi. 10.00-11.30 |
| Assistent: | J. Meyer | MA 817 | Mi 12.15-13.45 |
| Tutoren: | M. Haydenreich | MA 849 | Di 12.00-14.00 |
| | K. Radke | MA 849 | Mi 12.15-13.45 |
| | M. Rumpfkeil | MA 849 | Do 12.00-14.00 |
| | M. Seehafer | MA 849 | Fr 10.15-11.45 |
| | Dr. M. Sortais | MA 780 | Fr 13.00-14.30 |
| | D. Timmreck | MA 874 | n. V. |