Technische Universität Berlin WS 02/03

Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

4. Übung "Analysis I "

1.) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert genau eine ganze Zahl p mit $p \leq x < p + 1$. (Man nennt p den Integer oder das Größte Ganze von x und schreibt hierfür $[x]$.)

(b) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, r_n \in \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$.

2.) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, falls diese existieren:

(a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{4n^3+1}$

(b) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{n^4}$

(c) $a_n = \frac{n^3}{\binom{2n}{n}}$

(d) $\frac{3^n-5n^3+1}{2\cdot 3^n+n^5+n^2}$.

3.) Wir erklären die beiden Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$durch die Vorschriften

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right), \quad q_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right).$$

(a) Zeigen Sie durch Bestimmung des Grenzwertes, daß die Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$konvergieren. Den Grenzwert bezeichne man dann mit p, bzw. q.

(b) Zu $\epsilon = 10^{-2}$ ist ein effektives n_0 zu bestimmen, für welches $|p - p_n| < \epsilon$ bzw. $|q - q_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ bleibt. (Sie brauchen nicht das kleinste n_0 zu bestimmen.)

4.) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$Folgen reller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$konvergent $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$konvergent $\Leftrightarrow$ $(\max(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\min(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$konvergent $\Leftrightarrow$ $(\max(a_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\min(a_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

(e) $(\min(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$konvergent.

Abgabe: 18.11-22.11.2002 , in den Tutorien.