Technische Universität Berlin WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

5. Übung "Analysis I"

1.) **(Fibonacci- Zahlen und goldener Schnitt)**
Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$der Fibonacci- Zahlen: $a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\big)$.

(b) In der Architektur der Antike und der Renaissance spielte der goldene Schnitt eine hervorragende Rolle. Die Strecke $\overline{AB}$ sei durch den Punkt T nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn $\overline{TB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AB}$. Setzen wir als Grösse $\overline{AB} = 1$, so ist zu zeigen, daß für die Grösse τ der Streckenlänge $\overline{AT}$ gilt: $\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Der Zusammenhang des goldenen Schnitts mit der Fibonacci- Folge ist gegeben durch: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = \tau$. Leiten Sie dieses, bereits von J. Kepler erahnte Resultat her.

2.) **(Kettenbrüche und iterierte Wurzeln)**

(a) Vorwiegend in der älteren Literatur findet man unendliche Kettenbrüche, so zum Beispiel:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Wir verstehen darunter den Grenzwert der rekursiven Folge $a_0 = 1; a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, natürlich nur, falls dieser existiert.
Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$konvergiert. Bestimmen Sie zunächst ein q mit $0 < q < 1$, so daß $|a_{n+1} - a_n| < q|a_n - a_{n-1}|$ gilt und zeigen Sie hiermit, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$eine Cauchy-Folge bildet. Berechnen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$.

(b) Berechnen Sie die „iterierte Wurzel“:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

Machen Sie sich vorher klar, durch welche Rekursion dieser für uns nur suggestiv zu verstehende Ausdruck gegeben wird. Vergessen Sie nicht, einen strengen Konvergenzbeweis zu führen.

3.) **(Konvergenzuntersuchung)**
Entscheiden Sie, welche Folgen konvergieren.

(a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

(b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

(c) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(d) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

(e) $a_n = \frac{n^n + (n-1)^n + \cdots + 1^n}{n^n}$

4.) **(Satz von Stolz)**
Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis des folgenden

Satz. *Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng monoton wachsend und unbeschränkt, $y_n > 0$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine weitere Folge, für die gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.*

Zeigen Sie hierfür der Reihe nach:

(a) Mit den Festlegungen $x_0 = y_0 = 0, a_n = x_n - x_{n-1}, b_n = y_n - y_{n-1}$ reicht es zu zeigen: Aus den Voraussetzungen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist bestimmt divergent folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

(b) Mit den Bezeichnungen aus (4a) gilt:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leq \frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - a\right|\right)$$

(c) Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$\left|\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - a\right|\right)\right| < \varepsilon$$

Nutzen Sie die Voraussetzungen und beachten Sie die Tatsache $\left|\frac{a_n}{b_n} - a\right| \leq K$ für eine Konstante $K > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Als kleine Anwendung bestimme man $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p + (n-1)^p + \cdots + 1^p}{n^p}$ für ein festes $p \in \mathbb{N}$.

Abgabe: 25.11- 29.11.2002, in den Tutorien.

Die Klausuren zum Erwerb eines Übungsscheins finden statt am:

1.Klausur:	20.2.03	HE 105	13-15 Uhr
2.Klausur:	9.4.03	HE 105	11-13 Uhr

Sie müssen nur eine von beiden Klausuren bestehen, um einen Übungsschein zu erhalten.