Technische Universität Berlin WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

7. Übung "Analysis I "

1.) **(Konvergenz, absolute Konvergenz)**
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \iff \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a_k - a)$ konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (a_k - a)$ konvergent.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$ konvergiert, aber nicht absolut $\Leftrightarrow$ Für jede Umordnung gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} \neq s,\ \ \tau \not\equiv id_{\mathbb{N}}.$$

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut $\iff \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ konvergiert absolut.

(e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\iff \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, a_k$ konvergiert.

2.) **(Cauchy-Produkt)**

(a) Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^n$ konvergiert.
Zeigen Sie dann

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n.$$

(b) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der beiden bestimmt divergenten Reihen

$$3 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n\,, -2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.$$

Das Ergebnis ist eine absolut konvergente Reihe. Ist dies ein Widerspruch zu Satz 8.3 ?

Bitte wenden!

3.) **(Riemannscher Umordnungssatz)**

Satz. *Ist $\sum a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente unendliche Reihe und wird $S = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ beliebig vorgegeben, so gibt es eine Umordnung $\sum b_n$ der Reihe mit $\sum b_n = S$.*

Etwa in den Büchern:
Blatter: Analysis I; Springer / Barner-Flohr: Analysis I; deGruyter / Haupt-Aumann: Differential- und Integralrechnung; Göschens Lehrbücherei / H. Henser: Lehrbuch der Analysis I; Teubner / v.Mangoldt-Knopp: Einführung in die höhere Mathematik Bd. II; S. Hizel-Verlag / finden Sie Beweise dieses Satzes.

Geben Sie die Beweisidee in höchstens acht ausformulierten Sätzen. Wägen Sie ab, welche Inhalte des Beweises wesentlich und welche technischer Natur sind. Letztere sind wegzulassen.

4.) **(Exponentialfunktion)**

Beweisen Sie für die Exponentialfunktion:

(a) Für $x < y$ gilt: $\exp x < \exp y$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $1 + x \leq \exp x$

(c) Für $0 < x < 1$ gilt: $\exp x \leq \frac{1}{1-x}$

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 n}{(2n)!}$

Abgabe: 5.12- 13.12.2002, in den Tutorien.