**Technische Universität Berlin** WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisI`

# 9. Übung "Analysis I "

1.) **(Stetigkeit)**

Bestimmen Sie sämtliche $a \in \mathbb{R}$, in denen folgende Funktionen stetig sind.

(a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2-2}{(x+1)(x-1)^3} & , \quad x < -1 \\ \sqrt{2-x^2} & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - [x] & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
Bestimmen Sie zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$, so daß für alle $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0) < \varepsilon|$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \min\{|x - \nu| \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$
Beantworten Sie dieselbe Frage wie in (b).

Zusatzaufgabe: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^* \\ \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} & , \quad \frac{p}{q} = x \in \mathbb{Q}^*, p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$

2.) **(Oszillierende Funktionen)**

Es sei $s(x) := |x - [x] - \frac{1}{2}|,\ x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} s\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0\,. \end{cases}$

(a) Geben Sie eine grobe Skizze von $f$ und $s$. Diskutieren Sie dann die Stetigkeit von $s$ .

(b) Zeigen Sie, daß $f$ bei beliebiger Wahl von $a$ in $x = 0$ unstetig, sonst aber stetig ist.

(c) Ist $f$ gleichmäßig stetig auf $(0, 1)$?

**Bitte wenden!**

3.) **(Stetigkeitsbeschreibungen)**

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ vorgegeben. Welche Formulierungen sind äquivalent zur Stetigkeit von $f$ in $x_0 \in D$ ?

(a) $\forall \varepsilon \geq 0 \; \exists \, \delta > 0 : \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

(b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta \geq 0 : \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

(c) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .

(d) $\forall \varepsilon, \delta > 0 \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

4.) **(Eigenschaften stetiger Funktionen)**

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $h(x) := \max\{f(x), \, g(x)\}$ ist stetig in $D$ .

(b) Ist $D$ abgeschlossen, so auch $f^{-1}(\{0\})$ .

(c) Gilt für alle $r \in \mathbb{Q} \cap D : f(r) = g(r)$, so gilt bereits $f(x) = g(x) \forall x \in D$ .

5.) **(Zwischenwerteigenschaften)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ . Existiert dann ein $x \in ]a, b[$ mit

$$\frac{x^2 + 1}{x - a} + \frac{x^6 + 1}{x - b} = 0\,?$$

Abgabe: 6.1. - 11.1.2003, in den Tutorien.