Analysis Kompaktseminar 2003

Stand: 11. März 2003

Plan

Vormittags und nachmittags findet jeweils eine Session von 3 Stunden statt. In den ersten anderthalb Stunden werden in Vierergruppen (d.h. 3 Gruppen je Arbeitsraum) drei halbstündige Vorträge zu den vorgeschlagenen Themen vorbereitet. Diese werden in den zweiten anderthalb Stunden gehalten. Erst wenn all Studenten einmal vorgetragen haben, kann jemand zum zweiten Mal vortragen. In den Vorträgen geht es darum, den anderen einen kurzen Überblick (Definitionen, Sätze, Beispiele, Beweise) über das jeweilige Thema zu geben. Die hier angegeben Stichpunkte dienen einer groben Orientierung. Hinzunahmen, genauso wie Auslassungen sind sicher häufig sinnvoll.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
V	Anreise	Topologie	DGL	Integration II	Zus.
N	Analysis I	Differentiation	Integration I	Formen & Stokes	Abreise

Vorträge

1 Montag Nachmittag: Analysis I

1.1 Zahlen, Abbildungen

- Axiome der reellen Zahlen. Komplexe Zahlen.
- Abbildungen: Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit, Abzählbarkeit.

Z Abbildungen als Relationen. Konstruktion der reellen Zahlen aus den natürlichen Zahlen.

1.2 Konvergenz in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, Vollständigkeit

- Konvergenz: Definition, Sätze, Beispiele.
- Monotonie, Beschränktheit, Vollständigkeit.

Z Vollständigkeitsaxiom, Archimedisches Axiom & Cauchy–Vollständigkeit, Existenz des Supremums.

1.3 Reihen, Potenzreihen

- Konvergenz von Reihen, Kriterien, geometrische und harmonische Reihe, weitere Beispiele, Umordnung.
- Potenzreihen: Konvergenz, Stetigkeit, Ableitung, Integration, Beispiele.

Z Taylorapproximation.

Die anderen Themen der Analysis I sollen vom Standpunkt der Analysis II & III aus eingeordnet werden. Stellen, an denen ein Rückblick auf die Analysis I sinnvoll scheint, sind mit „Ana I“ gekennzeichnet.

2 Dienstag Vormittag: Topologie

2.1 Topologie metrischer Räume, normierte Vektorräume

- Definitionen: offene & abgeschlosse Mengen, Rand, Inneres, Abschluss, Topologie, Hausdorff–Eigenschaft, Beispiele.
- Äquivalente Metriken und endlich dimensionale (normierte) Vektorräume, Stetigkeit linearer Abbildungen, Vollständigkeit.

Z Induzierte Metrik, welche Eigenschaften bleiben erhalten: offen, abgeschlossen, Zusammenhang, Kompaktheit, . . . ?

2.2 Konvergenz, Kompaktheit

- Konvergenz, Häufungspunkte, Cauchy–Folgen, Vollständigkeit, Schachtelungsprinzip, Banachscher Fixpunktsatz (Ana I?, Wurzeln).
- Kompaktheit, Heine Borel, Bolzano–Weierstraß.

Z Kompaktheit und Vollständigkeit. Spezielle Eigenschaften topologischer Räume, die von Metriken kommen. Weitere Fixpunktsätze.

2.3 Stetige Abbildungen, Zusammenhang, Kompaktheit

- Definitionen: ϵ–δ, topologisch, über Konvergenz (Ana I?).
- Kompaktheit, Zusammenhang und stetige Abbildungen (Ana I?)
- Gleichmäßige Konvergenz (Ana I: Potenzreihen, Weierstraß Kriterium).

Z Gleichmäßige Stetigkeit und Vervollständigung metrischer Räume.

3 Dienstag Nachmittag: Differentiation

3.1 Definitionen

- Differenzierbar, partiell differenzierbar, stetig (partiell) differenzierbar, Beispiele (Ana I?).
- Höhere Ableitungen, Satz von Schwarz.
- Ketten– und Produktregel, Beispiele, Darstellungsmatrizen (Jacobi, Hesse), (Ana I?).

3.2 Taylor und Extrema

- Richtungsableitung, Schrankensatz, Satz von Taylor (Ana I?).
- Lokale und globale Extrema, Extrema unter Nebenbedingungen (Ana I?).

Z Konvexität.

3.3 Große Sätze

- Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen (AnaI?).
- Beweis.

Z Vergleichen Sie die Sätze mit den entsprechenden aus der linearen Algebra. Was erhält man im linearen Fall zusätzlich?

4 Mittwoch Vormittag: Untermannigfaltigkeiten & Differentialgleichungen

4.1 Unterannigfaltigkeiten

- Definition: Graphen (Parametrisierung), Lösungsmengen von Gleichungen, Karten, Tangentialraum, Rangsatz (Ana II & III !).

Z Orientierung, berandete Untermannigfaltigkeiten, nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten. Alle Untermannigfaltigkeiten der Dimension 1.

4.2 Existenz– und Eindeutigkeitssatz

- Definitionen, Aussage des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes, viele Beispiele, Beweis.

Z Lösungsverfahren für nicht lineare Typen.

4.3 Lineare Differentialgleichungen

- Existenzsätze, Struktur des Lösungsraumes, Wronski–Matrix, Lösungsmethoden, Beispiele.

Z Matrix exp–Funktion und Lösungen von linearen Differentialgleichungssystemen mit nicht konstanten Koeffizienten.

5 Mittwoch Nachmittag: Integration I

5.1 Lebesgueintegral, Konvergenzsätze

- Definition: Maß und Integral (Ana I?).
- Sätze von Beppo Levi und Lebesgue, Beweis.

Z Beispiele, Gegenbeispiele, Lemma von Fatou.

5.2 Messbarkeit, Fubini, Tonelli

- Definition messbarer Funktionen. Zusammenhang zu integrierbaren Funktionen.
- Sätze von Fubini und Tonelli. Beispiele und Gegenbeispiele.

Z Messbare und integrierbare Mengen.

5.3 Transformationssatz

- Satz, Beweis, Anwendungen (Ana I?).

Z Wie kann man die partielle Integration aus Ana I verallgemeinern? (Satz von Stokes)

6 Donnerstag Vormittag: Integration II, Fouriereihen, alternierende Formen

6.1 L^p Räume

- Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung, Vollständigkeit mit Beweis.

Z Die verschiedenen Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen. Einzigkeit des Lebesgueintegrals.

6.2 Fourierreihen

- Definition und Konvergenz.
- Überblick über den Konvergenzbeweis für das trigonometrische System.

Z Orthogonale Projektionen und Hilberträume, l^2.

6.3 Multilineare Algebra

- Alternierende Formen, Zusammenhang zu Determinanten und Volumen.

Z Volumen in k–dimensionalen Unterräumen und k–Formen.

7 Donnerstag Nachmittag: Differentialformen und Satz von Stokes

7.1 Differentialformen

- Definition, Ableitung, Beispiele, Anschauung.
- Zurückholen und Transformationsformel.

Z Klassische Differentialoperatoren. Finden der Differentialform zu einem Operator durch Untersuchung seines Transformationsverhaltens.

7.2 Potentiale & Integration

- Geschlossene und exakte Formen, de Rahm–Kohomologie, Lemma von Poincaré.
- Integrale über Ketten, Parameterunabhängigkeit.
- Fluss– und Volumenintegral. Definition des Volumens von k–Ketten und Transformationsformel.

Z Volumen von Untermannigfaltigkeiten und Transformationsformel.

7.3 Satz von Stokes

- Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes (Ana I?).

Z Anwendungen.

8 Freitag Vormittag: Zusammenfassung, offene Fragen oder Integration und Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

8.1 Anwendungen des Satzes von Stokes

- Geben Sie einen Überblick über ausgewählte Anwendungen aus dem Skript, und zeigen Sie, wie der Satz von Stokes eingeht.

8.2 Integration über Mannigfaltigkeiten

- Orientierung einer Mannigfaltigkeit und ihres Randes.
- Erläutern Sie am Beispiel des Torus die drei äquivalenten Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten. Was sind die Vor–, was die Nachteile der einzelnen Beschreibungen.
- Definition des Integrals.

8.3 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

- Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten.