TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN — WS 02/03

Institut für Mathematik — 11.2.2003

Prof. Dr. Ferus

Analysis III–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.
Die Klausur ist mit 20 Punkten bestanden. Sie haben 110 Minuten Zeit.

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{n^2}{x^n}\chi_{[1,n]}$.

a) Zeigen Sie, dass f_n für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral $\int f_n d\mu_1$.

b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_1$.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(f_n(x))$.

d) Gibt es eine Funktion $g \in L^1(\mu_1)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt $|f_n| \leq g$?

2. Aufgabe (10 Punkte)

Integrieren Sie $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2)$ bzgl. μ_3 über

$$B = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 6 \leq z \leq 8 \,\}.$$

(Nennen Sie auch hier die verwendeten Sätze.)

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π–periodische Fortsetzung von f. Konvergiert die Fourier–Reihe von g in $L^2([0,2\pi], \mu_1)$? In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier–Reihe, gegen welchen Wert?

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die 1–Form

$$\omega = (\lambda xz \cos x^2 + y)dx + x\,dy + (\sin x^2 - 2z)\,dz$$

ein Potential auf $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie ein Potential für diese λ.

b) Integrieren Sie, für die λ, für welche ω ein Potential besitzt, das Kurvenintegral $\int_c \omega$ über die 1–Kette

$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\sin(\pi t), 5t^2 + t - 2, 2te^{t^2-t}).$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $c\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos(2\pi\varphi), r\sin(2\pi\varphi), 3z).$$

Berechnen Sie $\int_{\partial c} *\omega^v$ für das Vektorfeld $v(x,y,z) = (y,-x,z)$.

Gesamtpunktzahl: 50

1	2	3	4	5	$\sum$