TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN — WS 02/03
Institut für Mathematik — Stand: 12. Februar 2003
Ferus / Peters

Lösungen zur Klausur vom 11.2.2003
Analysis III

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) f_n ist bis auf $x = 1$ und $x = n$ stetig, beschränkt und hat kompakten Träger. Also ist f_n integrierbar. Für stetig Funktionen auf kompakten Intervallen ist das Lebesgue–Integral bzgl. μ_1 gleich dem Regelintegral:

$$\int f_n d\mu_1 = \int_1^n \frac{n^2}{x^n} = \left[\frac{n^2}{(-n+1)x^{n-1}}\right]_1^n = \frac{n^2}{(1-n)n^{n-1}} - \frac{n^2}{(1-n)}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(1-n)n^{n-1}} - \frac{n^2}{(1-n)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1-n)n^{n-3}} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1-\frac{1}{n})} = \infty.$

c) Für $x < 1$ ist die Folge konstant 0, also konvergent. Für $x = 1$ konvergiert sie nicht, da $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$. Für $x > 1$ gilt (nach der Regel von de l'Hospital):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{x^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{x^n \ln x} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{x^n \ln^2 x} = 0.$$

d) Nein, da andernfalls die Integralfolge aus b) wegen der Monotonie des Integrals beschränkt sein müsste.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Mit Zylinderkordinaten $Z(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, $\det(DZ) = r$, der Transformationsformel und dem Satz von Fubini (da f als stetige Funktion auf einer kompakten Menge integrierbar ist) erhält man

$$\begin{aligned}\int_B \sin(x^2+y^2) &= \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_6^8 r\sin(r^2)\,dzd\varphi dr \\ &= \int_1^2 4\pi r\sin(r^2)\,dr = 2\pi(\cos(1)-\cos(4)).\end{aligned}$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Da $g \in L^2([0,2\pi],\mu_1)$ ist, konvergiert die Fourierreihe in $L^2([0,2\pi],\mu_1)$ gegen g. Da g stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe punktweise. In den Stetigkeitsstellen von g, d.h. für $x \in \mathbb{R}\setminus\{\, 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$ konvergiert sie gegen $g(x)$. Für $x \in \{\, 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$ konvergiert sie gegen den Mittelwert aus rechts– und linksseitigem Grenzwert, d.h. gegen π.

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, besitzt ω genau dann ein Potential, wenn $0 = d\omega = (2x\cos x^2 - \lambda x \cos x^2)\, dx \wedge dz$ ist, d.h. $\lambda = 2$. Dann ist $f(x, y, z) = xy + z\sin x^2 - z^2$ ein Potential von ω.

b) Nach dem Satz von Stokes

$$\int_c \omega = \int_{\partial c} f = f(c(1)) - f(c(0)) = f(0, 4, 2) - f(0, -2, 0) = -4.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Aus $d * \omega^v = \operatorname{div}(v)\, dx \wedge dy \wedge dz$, $\operatorname{div} v = 1$ und dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\partial c} *\omega^v = \int_c dx \wedge dy \wedge dz = \text{Vol(Einheitskreiszylinder der Höhe 3)} = 3\pi.$$