TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02
Institut für Mathematik http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII
Ferus / Peters Stand: 18. Dezember 2002

Lösungsskizzen zur 9. Übung Analysis III
(Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Durch die Substitution $v(x,t) = u(x,t) - 1$ lässt sich das Problem auf eins mit homogenen Randbedingungen zurückführen:

$$\begin{aligned} &v_t = v_{xx}, && \text{(Wärmeleitungsgleichung)}\\ &v(0,t) = 0, \quad v_x(\pi,t) = 0, && \text{(Randbedingung)}\\ &v(x,0) = \sin(\tfrac{3}{2}x). && \text{(Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

Mit dem Produktansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ erhält man:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Da der erste Quotient nur von x und der zweite nur von t abhängt, ist $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant. Das Problem zerfällt also in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

X–DGL: $X'' = \lambda X$. Mit dem Ansatz $X(x) = e^{\mu x}$ aus Analysis II bekommt man die Lösungen

$$X(x) = \begin{cases} c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0,\\ c_1 x + c_2, & \lambda = 0,\\ c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen liefern

$$v(0,t) = 0 \implies X(0) = 0, \quad \text{und} \quad v_x(\pi,t) = 0 \implies X'(\pi) = 0.$$

(Sonst wäre $T(t) \equiv 0$ und damit $v \equiv 0$ die triviale Lösung, die nur mit der Anfangsbedingung 0 vorkommt.) Diese Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn

$$\lambda = -\left(\tfrac{2n+1}{2}\right)^2, \ n \in \mathbb{N} \quad \text{und damit} \quad X(x) = c \sin \tfrac{2n+1}{2}x, \ c \in \mathbb{R}.$$

T–DGL: $T' = \lambda T$. Da $\lambda = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ bereits aus der X–DGL mit den Randbedingungen folgt, erhalten wir die Lösungen

$$T(t) = ce^{-(\frac{2n+1}{2})^2 t}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Eigenlösungen des Randwertproblems: Das Randwertproblem hat also die sogenannten Eigenlösungen (zu den Eigenwerten $\lambda = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$)

$$v_n(x,t) = e^{-(\frac{2n+1}{2})^2 t} \sin \tfrac{2n+1}{2}x,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fourierreihenansatz für das Anfangswertproblem: Da die gegebene Differentialgleichung linear ist, sind beliebige Linearkombinationen der Eigenlösungen wieder Lösungen des Randwertproblems (homogene Randbedingungen!!!). Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, setzt man im Allgemeinen eine Fourierreihe an

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{2n+1}{2})^2 t} \sin \tfrac{2n+1}{2}x.$$

Die Koeffizienten müssen dann wegen der Anfangsbedingung

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \tfrac{2n+1}{2} x$$

gerade die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedinung sein. (Diese Fouriereihe ist ein Teil—die sin–Summanden mit ungeraden Nummern—derjenigen für 4π–periodische Funktionen. Da die Anfangsbedingung aber nur auf $[0, \pi]$ erfüllt sein soll, kann man sie immer so fortsetzen, dass die Fourierkoeffizienten die oben nicht vorkommen Null sind.) Ist für das Anfangswertproblem eine unendliche Reihe nötig, so muss man noch die Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation beweisen (s. HA1+2). Wir haben hier Glück und finden die Lösung

$$v(x,t) = e^{-\frac{9}{4}t} \sin(\tfrac{3}{2}x) \implies u(x,t) = e^{-\frac{9}{4}t} \sin(\tfrac{3}{2}x) + 1.$$