Lösungsskizzen zur 9. Übung Analysis III

(Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Bezeichne die Partialsummen der Fourierreihe mit

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Dann ist $\sum e^{-ak} + e^{-bk}$ eine Majorante. Sie besteht aus zwei geometrischen Reihen, die wegen $0 < e^{-a}, e^{-b} < 1$ konvergieren. Also konvegiert die Reihe punktweise gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da die Majorante nicht von x abhängt, konvergiert (s_n) gleichmäßig. Die gleichmäßige Konvergenz impliziert auf jedem kompakten Intervall die Konvergenz von (s_n) im quadratischen Mittel und die Einschränkung von f auf dieses Intervall liegt in L^2.

b) Für die Ableitungen der Partialsummen erhalten wir

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx.$$

Bezeichne die neuen Koeffizienten $\tilde{a}_k = kb_k$ und $\tilde{b}_k = -ka_k$. Wähle $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, mit $0 < \tilde{a} < b$ und $0 < \tilde{b} < a$. Dann folgt mit dem Hinweis (Beweis unten) für fast alle k: $|a_k| \le ke^{-bk} < e^{-\tilde{a}k}$ und $|b_k| \le ke^{-ak} < e^{-\tilde{b}k}$. Damit ist wieder die Voraussetzung von a) erfüllt und die Ableitungen der Partialsummen konvergieren gleichmäßig. Also ist der punktweise Grenzwert f von (s_n) stetig differenzierbar und (s_n') konvergiert gegen f'. Mit vollständiger Induktion folgt nun die Behauptung (wir haben gezeigt, dass die Abschätzung für die Koeffizienten der Ableitung weiterhin gilt.)

Beweis des Hinweises: Sei $0 < \tilde{a} < a$. Dann gilt $0 < a - \tilde{a}$ und damit nach der Regel von de l'Hospital $\lim_{k\to\infty} ke^{-(a-\tilde{a})k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(a-\tilde{a})} e^{-(a-\tilde{a})k} = 0$. Insbesondere gilt für fast alle k: $ke^{-(a-\tilde{a})k} < 1$. Daraus folgt $ke^{-ak} < e^{-\tilde{a}k}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ erhält man:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Da der erste Quotient nur von x und der zweite nur von t abhängt, ist $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant. Das Problem zerfällt also in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

X–DGL: $X'' = \lambda X$. Mit dem Ansatz $X(x) = e^{\mu x}$ aus Analysis II bekommt man die Lösungen

$$X(x) = \begin{cases} c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \lambda = 0, \\ c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen liefern

$$u(0,t) = 0 \implies X(0) = 0, \quad \text{und} \quad u(1,t) = 0 \implies X(1) = 0.$$

Diese Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn

$$\lambda = -(n\pi)^2,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{und damit} \quad X(x) = c \sin n\pi x,\ c \in \mathbb{R}.$$

T–DGL: $T' = \lambda T$. Da $\lambda = -(n\pi)^2$ bereits aus der X–DGL mit den Randbedingungen folgt, erhalten wir die Lösungen

$$T(t) = ce^{-(n\pi)^2 t},\ c \in \mathbb{R}.$$

Eigenlösungen des Randwertproblems: Das Randwertproblem hat also die Eigenlösungen

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Fourierreihenansatz für das Anfangswertproblem: Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

Die Koeffizienten c_n müssen dann wegen der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x = 1 - x$$

gerade die Fourierkoeffizienten der ungeraden Fortsetzung der Funktion $1-x$ auf $[-1,1]$ sein. Also (Periode $T = 2$, dann ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$)

$$c_n = 2\int_0^1 (1-x) \sin n\pi x = 2\left[-\frac{1-x}{n\pi} \cos n\pi x - \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}$$

In unseren Ansatz eingesetzt erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

Wir haben also $u(x,0) = 1 - x$ für alle $x \in]0,1]$, da die 2–periodische Fortsetzung von der ungeraden Fortsetzung von $1 - x \colon]0,1] \to \mathbb{R}$ außer für $x \in 2\mathbb{Z}$ stetig ist. Allerdings ist $u(0,0) = 0 \neq 1 - 0$. Da kann man nichts gegen machen. Die Randbedingung $u(0,t) = u(1,t) = 0$ ist für alle $t \in]0,\infty[$ erfüllt.
Für festes $t \in]0,\infty[$ sind die Voraussetzungen von Hausaufgabe 1 erfüllt (betrachte die Glieder der Reihe als Funktionen von x) und wir können $u_{xx}(t,x)$ durch gliedweise Differentiation der Fourierreihe berechnen. Für festes $x \in]0,1[$ hingegen haben wir eine Potenzreihe in $z = e^{-\pi^2 t}$. Da die Reihe für $t = 0$, d.h. $z = e^{-\pi^2 0} = 1$, konvergiert, ist ihr Konvergenzradius mindestens 1. Sie ist also für alle $t \in]0,\infty[$ ($|z| = e^{-\pi^2 t} < 1$) konvergent und beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation. Da die Glieder der Reihe die Differentialgleichung erfüllen, gilt dies auch für $u(x,t)$ und $(x,t) \in]0,1[\times]0,\infty[$ (gliedweise Differentiation nach x und t). (Auf dem Rand ist es schwierig von einer Ableitung zu reden, hier ist die Lösung in $(0,0)$ noch nicht einmal stetig. In allen anderen Punkten ist sie stetig, d.h. die Randbedingungen sind bis auf den Punkt (0,0) erfüllt.)

3. Aufgabe (10 Punkte)

Mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ erhält man:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Da der erste Quotient nur von x und der zweite nur von t abhängt, ist $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant. Das Problem zerfällt also in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

X–DGL: $X'' = \lambda X$. Mit dem Ansatz $X(x) = e^{\mu x}$ aus Analysis II bekommt man die Lösungen

$$X(x) = \begin{cases} c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \lambda = 0, \\ c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen liefern

$$u_x(0,t) = 0 \implies X'(0) = 0, \quad \text{und} \quad u_x(\pi,t) = 0 \implies X'(\pi) = 0.$$

Diese Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn

$$\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N} \quad \text{und damit} \quad X(x) = c \cos nx, c \in \mathbb{R},$$

T–DGL: $T'' = \lambda T$. Da $\lambda = -n^2$ bereits aus der X–DGL mit den Randbedingungen folgt, erhalten wir die Lösungen (die T–DGL ist die gleiche wie die X–DGL)

$$T(t) = c \cos nt + d \sin nt, \ c, d \in \mathbb{R}.$$

Eigenlösungen des Randwertproblems: Das Randwertproblem hat also die Eigenlösungen

$$u_n(x,t) = \cos nt \cos nx, \qquad v_n(x,t) = \sin nt \cos nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fourierreihenansatz für das Anfangswertproblem: Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) + d_n v_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \cos nx.$$

Die Koeffizienten c_n müssen dann wegen der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx = \sin^2 x.$$

gerade die Fourierkoeffizienten von $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ sein, also $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ und der Rest gleich Null.

Wenn wir annehmen, dass wir u_t durch gliedweise Differentiation erhalten, dann erhalten wir für die Koeffizienten d_n wegen der Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} n d_n \cos nx = \cos 5x + \cos 26x.$$

gerade $d_5 = \frac{1}{5}$, $d_{26} = \frac{1}{26}$ und der Rest gleich Null.

In unseren Ansatz eingesetzt erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t \cos 2x + \frac{1}{5}\sin 5t \cos 5x + \frac{1}{26}\sin 26t \cos 26x.$$

Die Probe zeigt, dass wir eine Lösung der Aufgabe erhalten haben (insbesondere haben wir eine endliche Summe von diffenzierbaren Funktionen, d.h. wir dürfen gliedweise ableiten.)