3. Blatt Hausaufgabe 1b)

Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Der Träger S von f sei kompakt und $f|_S$ sei monoton. Dann ist f μ_1-integrierbar.

Beweis nach Ekki. Sei o.E. f monoton wachsend auf S.
Sei $a := \min S, b := \max S$. Definiere

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(a) & \text{für } x < a, \\ \sup f|_{]-\infty,x]\cap S} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton wachsend, also μ_1-meßbar, und es gilt

$$f(a) \leq \tilde{f} \leq f(b)$$

d.h. $\tilde{f}$ ist beschränkt. Weiter ist $\tilde{f}|_S = f|_S$ wegen der Monotonie von $f|_S$, und daher

$$f = \tilde{f}\,\chi_S.$$

Als Produkt einer integrierbaren und einer beschränkten meßbaren Funktion ist f daher integrierbar.

5. Blatt Tutoriumsaufgabe 1

Für die Funktionaldeterminante der verallgemeinerten Kugelkoordinaten

$$h_n : \mathbf{R}^n \supset [0,\infty[\times[0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi] \to \mathbf{R}^n$$

mit

$$h_2(r,\phi) := r(\cos\phi, \sin\phi),$$
$$h_{n+1}(r,\theta_{n-1},\ldots,\theta_1,\phi) := r(h_n(1,\theta_{n-2},\ldots,\theta_1,\phi)\sin\theta_{n-1}, \cos\theta_{n-1})$$

gilt

$$|\det Dh_n| = r^{n-1}(\sin^{n-2}\theta_{n-2})\ldots(\sin^1\theta_1).$$

Beweis. Durch Induktion.
Induktionsanfang klar.
Es ist

$$Dh_{n+1} = \begin{pmatrix} h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} & rh_n(1,\ldots)\cos\theta_{n-1} & r\,\frac{\partial}{\partial\theta_{n-k}}h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} & r\,\frac{\partial}{\partial\phi}h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} \\ \cos\theta_{n-1} & -r\,\sin\theta_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\det Dh_{n+1}| &= \pm r^n \sin^{n-1}\theta_{n-1} \begin{vmatrix} h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} & h_n(1,\ldots)\cos\theta_{n-1} & \frac{\partial}{\partial\theta_{n-k}}h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\phi}h_n(1,\ldots) \\ \cos\theta_{n-1} & -\sin\theta_{n-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \pm\frac{r^n\sin^{n-2}\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}} \begin{vmatrix} h_n(1,\ldots)\sin^2\theta_{n-1} & h_n(1,\ldots)\cos^2\theta_{n-1} & \frac{\partial}{\partial\theta_{n-k}}h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\phi}h_n(1,\ldots) \\ \cos\theta_{n-1}\sin\theta_{n-1} & -\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \pm\frac{r^n\sin^{n-1}\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}} \begin{vmatrix} h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} & h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\theta_{n-k}}h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\phi}h_n(1,\ldots) \\ \cos\theta_{n-1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \pm\frac{r^n\sin^{n-1}\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}} \begin{vmatrix} h_n(1,\ldots)\sin\theta_{n-1} & \frac{\partial}{\partial r}h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\theta_{n-k}}h_n(1,\ldots) & \frac{\partial}{\partial\phi}h_n(1,\ldots) \\ \cos\theta_{n-1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \pm r^n(\sin^{n-1}\theta_{n-1})|\det Dh_n(1,\theta_{n-2},\ldots,\phi)| \\
&= r^n(\sin^{n-1}\theta_{n-1})\ldots(\sin^1\theta_1).
\end{aligned}$$