TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Institut für Mathematik Abgabe: 4.11.2002
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII

2. Übung Analysis III

(integrierbare Funktionen, Konvergenzsätze von Beppo Levi und Lebesgue)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1$ und $I \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f\chi_I \in \mathcal{L}^1$.

2. Aufgabe

Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $I \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^n)$ integrierbar? Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$ eine μ_1–integrierbare Funktion?

3. Aufgabe

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass A genau dann eine Nullmenge ist, wenn $\chi_A \in \mathcal{L}^1$ und $\int \chi_A d\varphi = 0$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man in Lemma 2 nicht auf die Monotonie verzichten kann. Finden Sie dazu zu jedem $a \in \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen $h_m \geq 0$, $\lim h_m =_\varphi 0$ und $\lim \int h_m d\varphi = a$. Was passiert wenn man zusätzlich fordert, dass die Vereinigungen der Bilder und der Träger beschränkt sind?

2. Aufgabe (10 Punkte)

Lebesgue Integral und uneigentliches Regelintegral.

Sei $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$. Für alle $h \in \mathbb{R}$ sei $f\big|_{[0,h]}$ regelintegrierbar.

a) Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ ist, dann ist f uneigentlich regelintegrierbar und es gilt $\lim_{h\to\infty} \int_0^h f(x)dx = \int f dx$.

b) Sei $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,n+1[}$. f ist uneigentlich regelintegrierbar, aber nicht Lebesgue integrierbar. (Also gilt die Umkehrung von a) nicht, aber:)

c) Wenn f nicht–negativ und uneigentlich regelintegrierbar ist, dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Funktionen sind μ_1–integriebar, welche nicht? Geben Sie bei den integrierbaren die Werte der Integrale an.

a) $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$.

b) $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^\alpha$.

c) $\chi_\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$.

Gesamtpunktzahl: 20