4. Übung Analysis III

(Sätze von Fubini und Tonelli)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils $\int_B d\mu_2$:

a) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x, 1 < x < y \}$, $f(x, y) = e^{-x-y}$.
b) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2x^2 + y^2 \leq 1 \}$, $f(x, y) = 1$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Aufgabe

Sei

$$f\colon [-1,1]^2 \to_{\mu_2} \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Zeigen Sie, dass $f \notin \mathcal{L}^1([-1,1]^2, \mu_2)$ ist und trotzdem gilt

$$\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)dx \right) dy = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)dy \right) dx$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Berechnen Sie die μ_3–Maße jener Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, die von den folgenden Flächen begrenzt werden:

a) $x + y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 4$.
b) $z = a + x$, $z = -a - x$, $x^2 + y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$.
c) $x^2 + y^2 = az$, $x + z = 2a$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei

$$f\colon [0,1]^2 \to_{\mu_2} \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Berechnen Sie

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)dx \right) dy \qquad \text{und} \qquad \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)dy \right) dx$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1([0,1]^2, \mu_2)$?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ μ_n–messbar und beschränkt.

a) Zeigen Sie, dass A μ_n–integrierbar ist, und dass die Koordinatenfunktionen $x_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ über A μ_n–integrierbar sind. Falls $\mu_n(A) > 0$ ist, nennt man

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_1), \quad \bar{x}_j := \frac{1}{\mu_n(A)} \int_A x_j d\mu_n$$

den *Schwerpunkt* von A.

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines Kegels mit Radius r und Höhe h.

Gesamtpunktzahl: 20