# 5. Übung Analysis III

(Satz von Fubini und Transformationssatz)

---

## Tutoriumsvorschläge

### 1. Aufgabe

Schreiben Sie die Transformationsformel für Polar–, Kugel–, und Zylinderkoordinaten auf (inklusive der Aussagen über Integrierbarkeit). Verallgemeinern Sie die Kugelkoordinaten auf beliebige Dimension. Rechnen Sie damit verschiedene Volumina aus, z.B. das vom Torus: $0 < R_1 < R_2$

$$T = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R_2)^2 + z^2 \le R_1^2 \,\}$$

### 2. Aufgabe

Sei $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $R > 0$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $r^\alpha \chi_{\{r \ge R\}} \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ und für welche ist $r^\alpha \chi_{\{r \le R\}} \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$? Bestimmen Sie für die entsprechenden $\alpha$ die Integrale $\int r^\alpha \chi_{\{r \ge R\}} d\mu_n$ und $\int r^\alpha \chi_{\{r \le R\}} d\mu_n$.

## Hausaufgaben

### 1. Aufgabe (5 Punkte)

Integrieren Sie $\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ über die 3–dimensionale Kugel $D_1^3$.

### 2. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie die Guldinsche Regel: Sei $A \subset \mathbb{R}^2_+$ eine $\mu_2$–integrierbare Teilmenge der rechten Halbebene $\mathbb{R}^2_+ = \{\, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \,\}$ und sei $R$ die $y$–Koordinate des Schwerpunktes von $A$. Sei $V$ der Rotationskörper, der durch Rotation um die $z$–Achse in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ enststeht:

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in A \,\}.$$

Dann ist

$$\mu_3(V) = 2\pi R\, \mu_2(A).$$

Skizzieren Sie $V$ und $A$.

### 3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$ beide messbar. Dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $f^{-1}(\{c\}) = \{\, x \in A \mid f(x) = c \,\}$ messbar.

b) Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$ beide messbar, dann ist der Graph von f:

$$G = \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine $\mu_{n+1}$–Nullmenge. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $G = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) - y = 0 \,\}$, und dass sich der Satz von Tonelli auf $\chi_G$ anwenden lässt.)

c) Beweisen Sie, dass Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ $\mu_n$–Nullmengen sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jedem $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ einer Untermannigfaltigkeit $M$ ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und ein $p_0 \in \mathbb{R}^n$ mit rationalen Koordinaten gibt, sodass $p \in U_{\frac{1}{k}}(p_0)$ und sich $M \cap U_{\frac{1}{k}}(p_0)$ als Graph einer stetigen Funktion schreiben lässt.)

Gesamtpunktzahl: 20