TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Institut für Mathematik Abgabe: 2.12.02
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII

6. Übung Analysis III

(Transformationssatz, Konvergenz im p–Mittel, $\mathcal{L}^p$–Räume)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Identifizieren Sie $\mathcal{L}^p(\{1,\dots,k\},\delta_{\{1,\dots,k\}})$ mit $\mathbb{R}^k$ und zeigen Sie, dass punktweise Konvergenz und Konvergenz im p–Mittel äquivalent sind.

2. Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar. Zeigen Sie, dass für $0 < p < q$ gilt $\mathcal{L}^q(G,\varphi) \subset \mathcal{L}^p(G,\varphi)$. Geben Sie Beispiele für Funktionen an, die zeigen, dass $\mathcal{L}^q(G,\mu_n) \neq \mathcal{L}^p(G,\mu_n)$. Zeigen Sie, dass für unbeschränkte, messbare $G \subset \mathbb{R}^n$ keine Teilmengenbeziehung zwischen $\mathcal{L}^q(G,\mu_n)$ und $\mathcal{L}^p(G,\mu_n)$ mehr besteht.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $A \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine μ_n–integrierbare Menge. Zeigen Sie, dass der Kegel $K(A,p)$ über der Grundfläche A mit der Spitze p eine μ_{n+1}–integrierbare Menge ist, und dass $\mu_{n+1} = \frac{1}{n+1} h \mu_n(A)$, wobei h die Höhe des Kegels ist, d.h. der Abstand von p und $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f_n = n\chi_{]0,\frac{1}{n}[}$. Zeigen Sie, dass $\lim f_n = 0$ (punktweise), und dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass f_n in $\mathcal{L}^1(\mu_1)$ gegen f konvergiert. (Also impliziert punktweise Konvergenz nicht die Konvergenz im p–Mittel.)

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k_n \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$ (d.h. k_n ist die Anzahl der Stellen von n im Dualsystem minus eins),

$$I_n = [n2^{-k_n} - 1, (n+1)2^{-k_n} - 1]$$

und $f_n = \chi_{I_n}$. Skizzieren Sie f_n für $n \in \{1,2,3,4,5\}$, und zeigen Sie, dass die Folge (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu_1)$ gegen Null konvergiert, aber die Folge $(f_n(x))$ konvergiert für kein $x \in [0,1]$. Geben Sie eine Teilfolge an, die punktweise μ_1–fast überall gegen Null konvergiert. (Also impliziert Konvergenz im p–Mittel nicht die punktweise Konvergenz.)

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $0 < s \leq 1$. Zeigen Sie, dass für positive $f, g \in \mathcal{L}^s(A,\varphi)$ gilt $\|f+g\|_s \geq \|f\|_s + \|g\|_s$ und geben Sie für jedes $s \in]0,1[$ und $\varphi = \mu_1$ ein Beispiel für die strikte Ungleichung an. (Also gibt es für $0 < s < 1$ keine Dreiecksungleichung.)

Gesamtpunktzahl: 20

Info–Veranstaltung des Instituts für Mathematik
Auslandsstudien und Erasmus

Am Freitag, dem 29.11.02, findet von 11:00 s.t. bis 12:00 im MA 005 eine Info–Veranstaltung des Instituts für Mathematik zu Auslandsstudien und Erasmus mit folgendem Programm statt:

- Uebersicht ueber Austausch-Programme Europa und USA, insbes. Socrates/Erasmus, Info; Vorstellung der Beauftragten im Math. Institut und des Akad. Auslandsamtes,
- Berichte von ehemaligen Austausch-Studierenden,
- Vorstellung von Gaststudenten,
- Fragen aus dem Publikum.

Analysis–Fahrt

Im März 2003 ist eine Seminar-Fahrt zum Analysis Zyklus geplant. Weitere Information unter: http://www.falk-henrich.de/fahrt/info.html. Eine **verbindliche** Voranmeldung wird demnächst nötig.
Alle Lehrkräfte der Analysis (Prof. Dr. Ferus, Paul Peters, Stefan Bundfuss und Lars Matthäus) werden voraussichtlich mitfahren. In dem Seminar sollen wichtige Themen der Analysis wiederholt, vertieft oder ausgebaut werden. Die Teilnehmer wählen nach eigener Einschätzung ihres Wissensstandes eins der drei Ziele aus. Dementsprechend werden die Teilnehmer in Gruppen eingeteilt. Während des Seminars werden zu detailliert beschriebenen Themen Kurzvorträge zu zweit oder zu dritt ausgearbeit und den anderen Teilnehmern der Gruppe vorgetragen.