TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 03
Institut für Mathematik Abgabe: 9.12.02
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII

7. Übung Analysis III

(Hilberträume, Orthonormalsysteme und Orthogonalprojektionen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $(H, \langle, \rangle)$ ein Hilbertraum, $M \subset H$ ein Untervektorraum, $x \in H$ und $y \in M$. Zeigen Sie:

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M) \iff x - y \in M^{\perp}.$$

2. Aufgabe

Sei $(H, \langle, \rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und zu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $M_n = \operatorname{Spann}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Zeigen Sie das

$$\mathcal{F}_n \colon H \to M_n, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$$

die Orthogonalprojektion von H auf M_n ist.

3. Aufgabe

Identifizieren Sie $L^2(\mathbb{N}, \delta_{\mathbb{N}})$ mit dem Raum der quadrat–summierbaren Folgen l^2 und schreiben Sie die Höldersche Ungleichung mit Summen.
Sei für $\lambda \in]-1, 1[$:

$$\varphi_\lambda \colon l^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_k) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k.$$

Zeigen Sie, dass die φ_λ wohldefinierte stetige lineare Funktionale auf l^2 sind, und geben Sie zu jedem $\lambda \in]-1, 1[$ eine Folge $x(\lambda)$ an mit

$$\varphi_\lambda = \langle\,.\,, x_\lambda \rangle.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $(H, \langle, \rangle)$ ein Hilbertraum, $M \subset H$ ein abgeschlossener Untervektorraum.

a) Beweisen Sie die Parallelogramm–Gleichung: Für alle x, $y \in H$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

b) Zeigen Sie, dass jede Folge (x_n) in M mit $\lim \|x - x_n\| = \operatorname{dist}(x, M)$ eine Cauchy–Folge ist.

c) Zeigen Sie, dass es zu jedem x genau einen Vektor $x_M \in M$ gibt, der am dichtesten an x liegt. Zeigen Sie, dass $P\colon H \to M$, $x \mapsto x_M$ die Orthogonalprojektion von H auf M ist.

d) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ genau ein $x_M \in M$ und ein $x_M^\perp \in M^\perp$ gibt, sodass

$$x = x_M + x_M^\perp.$$

(Hinweis zur Eindeutigkeit: Wenden Sie P auf die Gleichung an.)

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $(H, \langle, \rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $H' = L(H, \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen linearen Funktionale auf H. (In der Analysis heißt H' Dualraum von H. Falls H unendlich dimensional ist, ist H' allerdings ein echter Teilraum des (algebraischen) Dualraums H^*.)
Zeigen Sie, dass

$$H \to H', \quad x \mapsto \langle\, . \,, x\rangle$$

ein wohldefinierter linearer Isomorphismus ist. (Hinweis zur Surjektivität: Sei $\varphi \in H'$. Wenden Sie 1d) auf $\operatorname{Kern}\varphi$ (abgeschlossen?) an: Zeigen Sie, dass es zu $\varphi \in H'$ ein $x_\varphi \in \operatorname{Kern}^\perp$ gibt mit $\varphi(x_\varphi) = \langle x_\varphi, x_\varphi\rangle$, und verwenden Sie, dass $y = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_\varphi)} x_\varphi + \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_\varphi)} x_\varphi$ für alle $y \in H$, falls $\varphi(x_\varphi) \neq 0$.)

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $(H, \langle, \rangle)$ ein Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis. Dann ist

$$\mathcal{F}\colon H \to l^2, \quad f \mapsto (\langle f, e_k\rangle)$$

ein isometrischer Isomorphismus. (Also gibt es bis auf Isomorphie nur einen unendlich dimensionalen Hilbertraum, der eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.)

Gesamtpunktzahl: 20