TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Ferus / Peters

WS 03
Abgabe: 16.12.02
`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII`

8. Übung Analysis III

(Fourierreihen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π–periodische Fortsetzung der Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0[, \\ \frac{(x-\pi)^2}{\pi^2}, & x \in]0, \pi[\end{cases}.$$

Entwickeln Sie f in eine Fouriereihe. In welchen Punkten konvergiert die Fourierreihe, gegen welchen Wert? Zeigen Sie

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

2. Aufgabe

Entwickeln Sie $f\colon]0, \pi[\to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ in eine 2π–periodische sin–Fourierreihe. Konvergiert diese Fourierreihe punktweise? Gegen welche Funktion? Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie die 2π–periodischen Fourierreihen von $f\colon]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $g\colon]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmmen Sie die Fourierreihen folgenden Funktionen $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$:

a) $\sin x \cos x$, b) $\sin^2(\frac{x}{2})$, c) $\sin^2 x$, d) $\cos^2 x$.

Konvergieren diese Fourierreihen punktweise? Gegen welche Funktionen?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Entwickeln Sie $f\colon]0, \pi[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1$ in eine 2π–periodische sin–Fourierreihe und eine 2π–periodische cos–Fourierreihe. Gegen welche Funktion konvergieren diese Fourierreihen? Konvergieren diese Fourierreihen punktweise? Gegen welche Funktionen?

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $0 < r < 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - re^{it}}\right) = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von $f(t) = \frac{1}{1-re^{it}}$ (Hinweis: geometrische Reihe) und die trigonometrische Fourierreihe von $g(t) = \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t + r^2}$.

Gesamtpunktzahl: 20