9. Übung Analysis III

(Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Rand–Anfangswert–Aufgabe:

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, && \text{(Wärmeleitungsgleichung)}\\
&u(0,t) = 1, \quad u_x(\pi,t) = 0, && \text{(Randbedingung)}\\
&u(x,0) = \sin(\tfrac{3}{2}x) + 1, && \text{(Anfangsbedingung)}
\end{aligned}
$$

für $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,\infty]$.

Hausaufgaben

(Alle Punkt dieses Blatts sind Zusatzpunkte).

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien (a_k) und (b_k) zwei Folgen, zu denen es $a, b \in]0,\infty[$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_k| \leq e^{-ak} \quad \text{und} \quad |b_k| \leq e^{-bk}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe zu diesen Koeffizienten:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(punktweise auf $\mathbb{R}$ und im quadratischen Mittel auf $[0,2\pi]$) gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist, und dass die n–mal gliedweise differenzierte Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos kx)^{(n)} + b_k (\sin kx)^{(n)}$$

gegen die n–te Ableitung $f^{(n)}$ von f konvergiert. (Hinweis: Beweisen und verwenden Sie: Ist $0 < \tilde{a} < a$, dann gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$: $ke^{-ak} < e^{-\tilde{a}k}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie die folgende Rand–Anfangswert–Aufgabe:

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, && \text{(Wärmeleitungsgleichung)}\\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, && \text{(Randbedingung)}\\
&u(x,0) = 1 - x, && \text{(Anfangsbedingung)}
\end{aligned}
$$

für $x \in [0,1]$, $t \in [0,\infty]$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Lösen Sie die folgende Rand–Anfangswert–Aufgabe:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, && \text{(Wellengleichung)}\\
&u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, && \text{(Randbedingung)}\\
&u(x,0) = \sin^2 x, \quad u_t(x,0) = \cos 5x + \cos 26x, && \text{(Anfangsbedingung)}
\end{aligned}
$$

für $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,\infty]$.

Gesamtpunktzahl: 20