10. Übung Analysis III

(Multilineare Algebra)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Sei $u \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\omega^u \wedge *\omega^u = < u, u > \det .$$

b) Seien $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$\omega^{u_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{u_n}(v_1, \ldots, v_n) = \omega^{v_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{v_n}(u_1, \ldots, u_n).$$

c) Seien u, $v \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$*\omega^{u \times v} = \omega^u \wedge \omega^v.$$

d) Seien u, v, $n \in \mathbb{R}^3$, $\|n\| = 1$ und A der Flächeninhalt der Projektion des von u und v aufgespannten Parallelogramms in die Ebene $n^\perp$. Zeigen Sie $\omega^{u \times v}(n) = A$.

2. Aufgabe

a) Seien $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende 3 Aussagen äquivalent sind

  a) $u_1, \ldots, u_k$ sind linear unabhängig.
  b) $\omega^{u_1}, \ldots, \omega^{u_k}$ sind linear unabhängig.
  c) $\omega^{u_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{u_k} \neq 0$

b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in V^*$ und $\nu_1, \ldots, \nu_k \in V^*$. Zeigen Sie, dass die alternierenden k–Formen $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ und $\nu_1 \wedge \ldots \wedge \nu_k$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\mathrm{Spann}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = \mathrm{Spann}\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $x_1, \ldots, x_n$ ihre Dualbasis. Seien die Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise disjunkt.

a) Zeigen Sie $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$.

b) Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ ist die Determinante der $k \times k$–Matrix, die durch Auswahl der Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ der Matrix $(v_1, \ldots v_k)$ entsteht.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (V, g) ein n–dimensionaler Euklidischer Vektorraum, $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von V und $\mu := g(\cdot, e_1) \wedge \ldots \wedge g(\cdot, e_n) \in \Lambda^n(V^*)$.

a) Zeigen Sie, dass für jede weitere Orthonormalbasis $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ von V gilt $|\mu(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)| = 1$.

b) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in V$ gilt

$$|\mu(x_1, \ldots, x_k)| = \sqrt{\det\left(g(x_i, x_j)_{1 \leq i,j \leq k}\right)}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und $\lambda \in \Lambda^2(V^*)$. Beweisen Sie:

a) Seien $u, v, w, z \in V$. Dann gilt

$$\lambda \wedge \lambda(u, v, w, z) = 2\lambda(u, v)\lambda(w, z) - 2\lambda(u, w)\lambda(v, z) + 2\lambda(u, z)\lambda(v, w).$$

b) Es gilt $\lambda \wedge \lambda = 0$ genau dann, wenn λ zerlegbar ist, d.h. es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$ mit $\lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2$. (Hinweis: Zeigen Sie mit b), dass $\lambda = \frac{1}{\lambda(w,z)}\lambda(\cdot, w) \wedge \lambda(\cdot, z)$.)

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung P : Spann$(x, y) \mapsto$ Spann$(x \wedge y)$ mit $x, y \in V$ und $\dim V \geq 2$ eine (wohldefinierte) Bijektion zwischen den 2–dimensionalen Unterräumen von V und den 1–dimensionalen Unterräumen von zerlegbaren Elementen von $\Lambda^2(V)$ ist.

Bemerkungen: In $x \wedge y$ werden $x, y \in V$ als 1–Formen auf V^* aufgefasst. Wegen der Identität $V^{**} = V$, kann man $x \wedge y \in \Lambda^2(V^{**})$ als Element von $\Lambda^2(V)$ betrachten. P ist die Plückereinbettung der Graßmann–Mannigfaltigkeit $G_2(V)$ als projektive Quadrik von $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$, da ihr Bild nach b) durch die quadratische Gleichung $\lambda \wedge \lambda = 0$ beschrieben wird.

Gesamtpunktzahl: 20