TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Ferus / Peters

WS 02
Abgabe: 20.1.03
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII

11. Übung Analysis III

(Differentialformen, Cartansche Ableitung)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Cartanschen Ableitungen von

a) $\frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$, b) $xy\,dx \wedge dy$, c) $e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$.

2. Aufgabe

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$df = \omega^{\operatorname{grad} f},$$

und dass der Gradient von f durch diese Gleichung eindeutig bestimmt ist.

3. Aufgabe

Beweisen Sie mit T2) und HA 2), dass aus $d^2 = 0$ für Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und Vektorfelder $X \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ folgt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie die Cartanschen Ableitungen von

a) $z^2\,dx \wedge dy + (z^2 + 2y)\,dx \wedge dz)$, b) $5x\,dx + y^2\,dy + xyz\,dz$,

c) $x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $X \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass

$$d\omega^X = *\omega^{\operatorname{rot} X},$$

und dass die Rotation durch diese Gleichung eindeutig bestimmt ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ die Polarkoordinatenabbildung für die Ebene ohne den Nullpunkt. Beweisen Sie:

a) Für die Windungsform $\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$ gilt $f^*\omega = d\theta$.

b) Für die radiale Form $\omega = x\,dx + y\,dy$ gilt $f^*\omega = r\,dr$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X(v) = \frac{v}{\|v\|^n}$. Zeigen Sie, dass

$$d * \omega^X = 0.$$

Gesamtpunktzahl: 20