12. Übung Analysis III

(Potentiale und Integration von Differentialformen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Untersuchen Sie, welches der folgenden beiden Vektorfelder ein Potential besitzt und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential.

$$v, w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x + \sin z \\ \cos y - y \sin y \\ x \cos z + 4e^{2z} \end{pmatrix}, \quad w(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2yz \\ z + x \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

Seien

$$v_{1,2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad v_1(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}, \qquad v_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ y^3 - 3yx^2 \end{pmatrix}.$$

a) Welches Vektorfeld besitzt ein Potential?
b) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale der beiden Vektorfelder über die beiden Wege
   - $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$,
   - γ_2 Verbindung von $(0,1)$ und $(1,2)$ über achsenparallele Strecken (zuerst parallel zur x–Achse).

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Länge des Einheitskreisbogens in $\mathbb{R}^2$ zwischen $(1,0)$ und $(\cos\theta, \sin\theta)$ gleich θ ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie Fluss– und Arbeitsintegral der Vektorfelder

a) $v_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ X \mapsto \frac{1}{\|X\|^2}X,$ b) $v_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}\left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right).$

über die Kurven $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Skizzieren Sie c, v_1 und v_2.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei

$$v_\lambda\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda xy - z^3 \\ (\lambda-2)x^2 \\ (1-\lambda)xz^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt v_λ ein Potential. Bestimmen Sie die zugehörigen Potentiale.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}_{>0}$ der Radius der Rotationsfläche

$$F = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2(z), z \in [a, b] \,\}.$$

Zeigen Sie, dass F den Flächeninhalt

$$2\pi \int_a^b r(t)\sqrt{1 + (r'(t))^2}dt$$

besitzt und berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Rotationsfläche zur Kettenlinie: $r(z) = \cosh z$, $z \in [-1, 1]$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

a) Berechnen Sie $\int_c \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

b) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ geschlossen, $G_\pm = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0, \pm y \geq 0\}$ die an der positiven bzw. negativen y–Achse aufgeschlitzte Ebene und $H_\pm = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x \geq 0 \,\}$ die linke bzw. die rechte Halbebene. Beweisen Sie, dass es Potentiale $\theta_\pm$ von ω auf $G_\pm$ und Konstanten $c_\pm$ gibt, sodass

$$(\theta_+ - \theta_-)\big|_{H_+} = c_+, \quad (\theta_+ - \theta_-)\big|_{H_-} = c_-, \quad \int_c \omega = c_+ - c_- \ .$$

c) Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} \textstyle\int_C\colon H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \textstyle\int_c \omega \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Vektorraumisomorphismus ist.

Gesamtpunktzahl: 20