TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN — WS 02
Institut für Mathematik — Abgabe: 3.2.02
Ferus / Peters — http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS02/AnalysisIII

13. Übung Analysis III

(Der Satz von Stokes)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Beschreiben Sie die folgende Fläche in $\mathbb{R}^4$ als 2–Kette (Parametrisierung):

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2, \qquad x_3^2 + x_4^2 = b^2.$$

b) Integrieren Sie die 2–Form $\varphi = x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_3$ über diese Fläche.

c) Berechnen Sie $d\varphi$.

d) Beschreiben Sie die Fläche als den Rand eines 3–dimensionalen Körpers im $\mathbb{R}^4$, und überprüfen Sie den Satz von Stokes in diesem Fall.

2. Aufgabe

Beweisen Sie den Satz von Green: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, p, q: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in C_2(G)$. Dann gilt

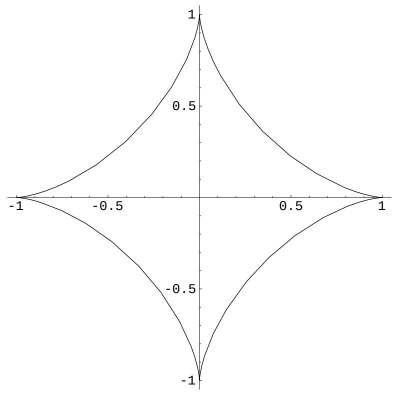
$$\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial C} pdx + qdy.$$

Folgern Sie: Falls C injektiv und $\det(Dc) \geq 0$ ist, so gilt

$$A(c) = \int_C dx \wedge dy = \int_{\partial C} xdy = -\int_{\partial C} ydx = \frac{1}{2} \int_{\partial C} -ydx + xdy.$$

3. Aufgabe

Berechnen Sie den FLächeninhalt der Asteroide, die durch die Kurven $x = \cos^3 t$ und $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ begrenzt wird.
(Hinweis: $\int \cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{1}{192}(12t + 3\sin(2t) - 3\sin(4t) - \sin(6t))$.)



Klausurtermin:

Die Klausur findet am Dienstag, den 11.02.03, von 16–18 Uhr im H 105 statt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Integrieren Sie

$$\varphi = (x - y^2 + z^3)(dy \wedge dz + dx \wedge dz + dx \wedge dy)$$

über den Rand des Würfels $0 \leq x, y, z \leq a$ (Hinweis: Stokes).

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei

$$\varphi = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a) Bestimmen Sie $d\varphi$.

b) Integrieren Sie φ über die Einheitssphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) Integrieren Sie φ über den Würfel der Seitenlänge 4 um den Koordinatenursprung.

d) Besitzt φ eine Stammfunktion?

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Beweisen Sie den (klassischen) Satz von Stokes: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F\colon G \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_2(G)$ ein Flächenstück in G. Dann gilt

$$\int_C < \operatorname{rot} F, dO >= \int_{\partial C} < F, ds > .$$

b) Sei $p \in I^2$ ein Punkt im Inneren von I^2, $C \in C^\infty(I^2, G)$ und C_r die Einschränkung von C auf das Quadrat der Kantenlänge r um p. Zeigen Sie

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{A(C_r)} \int_{\partial C_r} < F, ds >=< \operatorname{rot} F, N > (p).$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Beweisen Sie den Satz von Gauß (Divergenzsatz): Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_n(G)$ ein Volumenstück in G. Dann gilt:

$$\int_C \operatorname{div} F dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\partial C} < F, dO > .$$

b) Sei $p \in I^3$ ein Punkt im Inneren von I^3, $C \in C^\infty(I^3, G)$ und $C_r := C$ die Einschränkung von C auf den Würfel der Kantenlänge r um p. Zeigen Sie

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{V(C_r)} \int_{\partial C_r} < F, dO >= \operatorname{div} F(p).$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Gesamtpunktzahl: 20